# Généralités sur les applications affines

P est un plan affine, V le plan vectoriel associé à P et $R=(O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère de P.

## 1. Définitions

1 - Soit f une application du plan P dans lui-même, qui, au point M associe M' = f(M).
f est une application affine si et seulement f conserve le barycentre.

Soit G le barycentre du système de points { $(A_1, \lambda_1), \ldots, (A_n, \lambda_n)$ }, on a $\sum_i \lambda_i \vec{GA_i} = \vec{0}$

Soit $A'_i$ et G' les images par f de $A_i$ et G, f conserve le barycentre si $\sum_i \lambda_i \vec{G'A'_i} = \vec{0}$

2- Un point A est invariant par une application affine f si A = f(A).

3- Si F est une figure du plan (un ensemble de points quelconque), on appelle image de F par f et on note f(F) l'ensemble des points de la forme f(M) lorsque M décrit F.
Si f(F) = F, on dit que F est globalement invariante par f.

Remarque : Dire que F est globalement invariante par f ne signifie pas que tous les points de F sont fixes par f.
- Un segment [AB] est globalement invariant par la symétrie centrale dont le centre est le milieu de [AB], mais seul le milieu de [AB] est un point fixe par cette application.
- Une droite (AB) est globalement invariante par la translation de vecteur $\vec{AB}$ alors que cette application n'a aucun point fixe.

4- L'application qui, à tout point M du plan associe le point M lui-même s'appelle l'application identique ou l'identité et se note IdP ou Id

Remarque  Pour cette application, tous les points sont invariants

5- Une transformation affine est une application affine bijective.

## 2. Conséquences

Le transformé du milieu du bipoint (A, B) par une application affine est le milieu du bipoint (A',B')
L'image du segment [A,B] est le segment [A',B'].
Une application affine conserve l'alignement et l'ordre des points.
La transformée d'une droite par une application affine injective est une droite.

## 3. Autres définitions et théorèmes

### Composition

L'application composée de f et de g, notée f o g, est l'application affine qui à tout point M du plan associe le point (f o g) (M) = f [g (M)]

### Remarques

- Si f, g et h sont trois transformations : (f o g) o h = f o (g o h).
- En général g o f $\neq$ f o g. Lorsque g o f = f o g, on dit que les transformations f et g commutent.

**Définition**

La réciproque f-1 d'une transformation f est la transformation qui, à tout point N associe son unique antécédent par f.
f-1 (M) = N $\Leftrightarrow$ M = f (N)

$f^{-1}$ est une transformation et $(f^{-1})^{-1} = f$ et $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = Id$

**Théorème**

Si f et g sont deux transformations, f o g est une transformation et $(f \circ g)^{-1} = g^{-1}\ 0\ f^{-1}$

Démonstration. Si on pose g (M) = M' et f (M') = M'' : M = $g^{-1}$ (M') et M' = $f^{-1}$ (M'') :
D'où $g^{-1} \circ f^{-1}$ (M'') = $g^{-1}$ [ $f^{-1}$ (M'')] = $g^{-1}$ (M') = M
et f o g (M) = f [g (M)] = f (M') = M'' $\Rightarrow$ M = $(f \circ g)^{-1}$ (M'') :

Remarques
- Si f o g = h alors f = h o $g^{-1}$ et g = $f^{-1}$ o h
- Si f o g = g o f = Id alors g = $f^{-1}$.

**Théorème**

Toute application affine transforme deux bipoints équipollents en deux bipoints équipollents. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ implique $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{C'D'}$ .

**Théorème**

P étant un plan affine, il existe une application affine, et une seule, de P, vers lui-même transformant trois points non alignés A, B, C respectivement en trois points A', B', C'.

Il en résulte qu'une application affine de P vers lui-même est déterminée par la donnée de trois points non alignés A, B, C et de leurs transformés A', B', C'.

En particulier, si une application affine f de P vers P possède au moins trois points invariants non alignés, alors f est l'application identique de E.

## 4. Traduction complexe d'une application bijective

Soit f une application de P dans P. Tout point M du plan a pour image un et un seul point du plan. On peut associer à f une fonction F de C dans C de la manière suivante. Dans un repère orthonormé $(O, \vec{e_1}, \vec{e_2})$, a tout point est associé un nombre complexe unique. La fonction F associée à f est alors définie par : si z est l'affixe de M alors F(z) est l'affixe de f(M).

Réciproquement, considérons une fonction F de C dans C ; tout nombre complexe a pour image un nombre complexe et un seul. On peut lui associer une application f de P dans P de la manière suivante : un repère orthonormé étant choisi, l'application f, associée à F est définie par : si M est le pont d'affixe z alors f(M) et le point d'affixe F(z).

## 5. Application linéaire associée a une application affine

- O est un point donné du plan, et f une application affine. Soit $\vec{u}$ un vecteur quelconque ; il existe un point M et un seul tel que $\vec{u} = \vec{OM}$.

Notons O' et M' les images respectives de O et M par f. Définissons une application $\varphi$ du plan vectoriel V, associé au plan affine P, dans lui-même en associant l'image $\varphi(\vec{u})$ à tout vecteur $\vec{u}$ de la façon suivante : $\varphi(\vec{OM}) = \vec{O'M'}$.

Remarque : Cette définition de $\varphi$ ne dépend pas du point O choisi initialement, car f conserve l'équipollence. En effet, si $\vec{OM} = \vec{AN}$, alors on a $\varphi(\vec{AN}) = \vec{A'N'} = \vec{O'M'}$.

- L'application $\varphi$ ainsi définie est appelée application linéaire (ou endomorphisme) associée à l'application affine f.

- On vérifie que, quels que soient les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et le réel $\lambda$ on a :

$$\varphi(\vec{u} + \vec{v}) = \varphi(\vec{u}) + \varphi(\vec{v})$$

$$\varphi(\vec{\lambda u}) = \lambda \varphi(\vec{u})$$