Calcul intégral

Exercice 1

1° Soit l un nombre réel strictement positif. Calculer $I(\lambda) = \int_0^{\lambda} \frac{2x\,dx}{(x^2+1)^3}$.

Calculer la limite éventuelle de $I(\lambda)$ lorsque l tend vers $+\infty$.

2° Même question avec $I(\lambda) = \int_{-\lambda}^{\lambda} \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+x+2}}dx$.

Exercice 2

1 - Calculer la valeur moyenne de :

a) $f : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1+x}}$ sur [0,8]

b) $g : x \mapsto \frac{1}{x^2}$ sur [1,2] puis sur $[\frac{1}{n},1]$, $n \in \mathbb{N}^*$

Exercice 3

1) Calculer $\int_a^t \frac{\sin x}{\cos^3 x}dx$.

2) En déduire, en effectuant une intégration par parties I = $\int_a^t \frac{x\sin x}{\cos^3 x}dx$ et J = $\int_0^{\pi/4} \frac{x\sin x}{\cos^3 x}dx$

Exercice 4

1- a) Montrer que $f : x \mapsto f(x) = \int_0^x \frac{1}{\cos t}dt$ est définie sur $I =]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$.

b) Calculer f ’(x) et étudier le sens de variation de f.

2- Mêmes questions pour $f(x) = \int_1^x \sqrt{1+t^2}dt$ et $f(x) = \int_x^3 \frac{1}{1+t^2}dt$.

Exercice 5

1) Soit f une application de R dans R , continue sur R, et u et v deux applications de R dans R, dérivables sur R. Soit g l’ application de R dans R définie pour tout réel x par : $g(x) = \int_{u(x)}^{v(x)} f(t)dt$

Démontrer que g est dérivable sur R et que l’on a, pour tout x de R, g’(x) = v’(x)f[v(x)]-u’(x)f[u(x)].

2) Application $g: x \mapsto \int_x^{2x} \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}}$

a) les hypothèses du 1) sont-elles vérifiées ?

b) Calculer g’(x) pour tout réel x.

c) Déterminer le sens de variation de g.

Exercice 6

Soit (u_n) la suite définie par $u_n = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - .... + \frac{(-1)^n}{2n+1} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1}$. On se propose d'établir que (u_n) converge vers $\frac{\pi}{4}$. Soit la fonction F définie par $F(x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2}$.

A - 1° Justifier la dérivabilité de F et calculer F' .

2° Soit u la fonction définie sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ par u (x) = F (tan x). Calculer u'(x) pour tout x de $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$. En déduire que u(x) = x pour tout x de $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ et que $\int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{4}$.

B- 1° Montrer que, pour tout réel t : $(1 - t^2 + t^4 + ... + (-1)^n t^{2n}) - \frac{1}{1+t^2} = (-1)^n \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}$.

2° En déduire, à l'aide d'une intégration, que : $u_n - \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = (-1)^n \int_0^1 \frac{t^{2n+2}}{1+t^2} dt$.

3° Montrer que pour tout réel t de [0 , 1], on a : $\frac{t^{2n+2}}{1+t^2} \le t^{2n+2}$. **(1)**

En déduire que $\left| u_n - \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} \right| \le \frac{1}{2n+3}$. Conclure.

Exercice 7

Soit = $\mathbf{I_n} = \int_0^{\pi/2} \mathbf{\sin^n x\, dx}$, $n \in \mathbb{N}$

1) Calculer I_0 et I_1.

2) En effectuant une intégration par parties, montrer que pour $n \ge 2$ $n I_n = (n-1) I_{n-2}$.

En déduire I_{2p} et I_{2p+1}

3) Montrer que (I_n) est décroissante.

4) En utilisant les inégalités $I_n < I_{n-1} < I_{n-2}$., trouver la limite de $\frac{I_{n-1}}{I_n}$ quand n tend vers $+\infty$

5) Montrer que pour tout n au moins égal à 1, $n I_n I_{n-1} = \frac{\pi}{2}$

En déduire les limites de I_n et $I_n\sqrt{n}$ quand n tend vers $+\infty$

Exercice 9

Soit f l'application de]-1;+∞ [définie par $f(x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t^3}$ pour tout x de]-1;+∞ [

1) Calculer f '(x) et déterminer le sens de variation de f

2) Soit (u_n) la suite définie pour tout n de N par $u_n = \int_0^n \frac{dt}{1+t^3}$

a) Démontrer que (u_n) est croissante.

b) Démontrer les inégalités suivantes : $u_1 < 1$ et $\int_1^n \frac{dt}{1+t^3} < \int_1^n \frac{dt}{t^3}$

En déduire que (u_n) est convergente.

Exercice 10

On considère la suite (I_n) définie pour tout entier n par : $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{10+x}dx$

1- Calculer I_0.

2- Etude de (I_n) :

a) Montrer que pour tout n , I_n est positif ou nul.

b) Montrer que la suite (I_n) est décroissante.

c) Montrer que la suite (I_n) est convergente.

d) Montrer que $\frac{1}{11(n+1)} \leq I_n \leq \frac{1}{10(n+1)}$.

e) En déduire la limite de (I_n).

Exercice 11

On considère la fonction $F : x \mapsto \int_0^x \frac{\sin t}{t}dt$.

1- a) Montrer que la fonction f définie par : $\begin{cases} f(0) = 0 \\ f(x) = \frac{\sin x}{x} \quad \text{si } x \neq 0 \end{cases}$ est continue sur IR.

b) En déduire l'existence de la fonction $F : x \mapsto \int_0^x f(t)dt$.

Par extension, on notera $F(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t}dt$

2- Etudier la parité de F.

3- Quel est le sens de variation de F sur les intervalles $[2n\pi ,(2n+1)\pi]$ $n \in$ IN, et sur les intervalles $[(2n+1)\pi ,(2n+2)\pi]$, $n \in$ IN ?

4- Sachant que pour tout $x \in [0,1]$, $x - \frac{x^3}{3!} \leq \sin x \leq x$, montrer que pour tout $x \in [0,1]$

$$x - \frac{x^3}{18} \leq F(x) \leq x$$

5- Tracer l'allure de la courbe représentative de F dans un repère $(0, \vec{i}, \vec{j})$ pour $x \in [-1,1]$.

6- Soit $a_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin x}{x} dx$.

a) Montrer que $a_n = \int_0^{\pi} \frac{\sin(n\pi + t)}{n\pi + t} dt$

b) En déduire que pour tout $n \geq 0$, $a_{2n-1} \leq a_{2n+1} \leq 0 \leq a_{2n+2} \leq a_{2n}$

c) Montrer que, pour tout n > 0 , $0 < a_{2n} + a_{2n+1} \leq \frac{1}{4n^2}$

7- a) Montrer que pour tout n >1, $\int_n^{n+1} \frac{dx}{x^2} \leq \frac{1}{n^2} \leq \int_{n-1}^{n} \frac{dx}{x^2}$

b) En déduire que la suite (S_n) définie par : $S_n = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + ... + \frac{1}{n^2}$ converge.

c) Montrer que sin x < x pour tout x > 0. En déduire un encadrement de a_0.

8- a) Déduire de la question précédente que la suite (I_n) définie par $I_n = \int_0^{2n\pi} \frac{\sin x}{x} dx$ $(n \in IN)$ est croissante et convergente.

b) Montrer que si $x \in [(2n+1)\pi, (2n+2)\pi]$ avec $n \in IN$, alors $I_n \leq F(x) \leq I_{n+1}$

c) Montrer que si $x \in [2n\pi, (2n+1)\pi]$ avec $n \in IN$, alors $I_n \leq F(x) \leq I_n + \frac{1}{2n}$

En déduire que F est positive sur IR^+, et que F admet une limite finie quand x tend vers $+\infty$, et quand x tend vers $-\infty$.