Analyse Combinatoire – Probabilité

Site MathsTICE de Adama Traoré Lycée Technique Bamako

Exercice 1

Les élèves d'une classe sont choisis au hasard l'un après l'autre pour subir un examen.
Calculer la probabilité p pour que l'on ait alternativement un garçon et une fille sachant que :
1°) la classe est composée de 4 garçons et 3 filles
2°) la classe est composée de 3 garçons et 3 filles.

Exercice 2

Une boîte A contient 8 pièces détachées dont 3 sont défectueuses et une boîte B contient 5 pièces dont 2 sont défectueuses. On tire au hasard une pièce détachée dans chaque boîte.
1°) Quelle est la probabilité p_1 pour que les deux pièces détachées ne soient pas défectueuses ?
2°) Quelle est la probabilité p_2 pour que l'une des pièces détachées soit défectueuse et l'autre ne l'est pas ?
3°) Si l'une des pièces est défectueuse et l'autre ne l'est pas, quelle est la probabilité p_3 pou que la pièce défectueuse provienne de l'urne A ?

Exercice 3

Les probabilités pour que trois tireurs atteignent une cible sont : $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{3}$. Chacun tire une seule fois sur la cible.
1°) Calculer la probabilité *p* pou que l'un d'eux atteigne exactement la cible.
2°) Si seulement un d'eux a atteint la cible, quelle est la probabilité q pour qu'il s'agisse du premier tireur ?

Exercice 4 (Bac SBT : Juin 1984)

On dispose d'un dé pipé dont les faces sont numérotées de 1 à 6. On jette ce dé et on note le chiffre obtenu sur la face supérieure.
La probabilité p(n) d'obtenir le chiffre n est donnée par les hypothèses suivantes :
$P(1) = \frac{1}{4}$ et les p(i) forment une progression arithmétique de raison a.
1°/ a) Calculer les p (i) , i parcourant l'univers **Ω**, et leur somme en fonction du premier terme et de la raison a.
b) En déduire les valeurs de la raison a et des probabilités des événements élémentaires.
c) Quelle est la probabilité d'obtenir un chiffre multiple de 3 ?
2°/ On jette ce dé 5 fois de suite. Soit X la variable aléatoire qui au 5 jets du dé associe le nombre de fois où le 1 est sorti.
a) Donner la loi de probabilité de X ;
b) Déterminer la fonction de répartition de X et tracer sa courbe représentative.
c) Calculer l'espérance mathématique et la variance de X

Exercice 5 (Bac SBT Juin 1980)

Dans un centre d'examen un surveillant procède à un contrôle d'identité. On admet que 2% des élèves contrôlés ont oublié leur carte d'identité à la maison.
Le surveillant contrôle n élèves. On considère la variable aléatoire X égale au nombre d'élèves ayant oublié leu carte d'identité à la maison.
1°/Exprimer en fonction de *n* la probabilité de l'événement : $\{X = 0\}$.
2°/ Exprimer en fonction de *n* la probabilité, pour qu'au cours du contrôle, il y ait au moins un élève ayant oublié sa carte d'identité
3°/ Calculer le nombre minimum N d'élèves à contrôler pour que la probabilité de l'événement $\{X\geq 1\}$ soit supérieure ou égale à 0,95.
4°/ Calculer l'espérance mathématique et l'écart type de X.

Exercice 6 (Bac SBT Juin 1982)

Un sac contient 10 jetons qui ont la même probabilité d'être tirés, n d'entre eux sont marqués 10 les autres sont marqués 50. n est un entier naturel vérifiant $3 \leq n \leq 7$.
On tire ensemble 3 jetons du sacs et on désigne par X la variable qui, à un tirage associe la somme des nombres marqués sur les 3 jetons.
1°/ Déterminer l'ensemble des valeurs prises par X.
2°/ Déterminer la loi de probabilité de X.
3°/ Montrer que l'espérance mathématique de X est /

$$E(X) = \frac{n(n-1)(n-2)}{24} + \frac{7n(n-1)(10-n)}{24} + \frac{11n(10-n)(9-n)}{24} + \frac{5(10-n)(9-n)(8-n)}{24}.$$

4°/ Calculer E(X).

5°/ Déterminer n pour que $60 \leq E(X) \leq 90$.

Exercice 7 (Bac SET Juin 1988)

On considère cubique dont les 6 faces sont numérotées de 1 à 6. Ce dé est pipé.
1°/ Lorsqu'on lance le dé une fois, déterminer la probabilité pi d'apparition de la face numérotée i sachant que : $p_1 = p_3 = p_5$; $p_2 = p_4 = p_6$ et $p_2 = 3p_1$.
2°/ On lance le dé 5 fois de suite et on désigne par X la variable aléatoire égale au nombre de résultats pairs obtenus. Déterminer la loi de probabilité de X et calculer son espérance mathématique.

Exercice 8 (Bac SET Juin 1987)

On joue avec deux dés cubiques non pipés.
Les faces de l'un sont numérotées : 0 ; 0 ; $\frac{\pi}{3}$; $\frac{\pi}{3}$; $\frac{4\pi}{3}$; $\frac{4\pi}{3}$
Les faces de l'autre sont numérotées 0 ; 0 ; $\frac{\pi}{6}$; $\frac{\pi}{6}$; $\frac{\pi}{2}$; $\frac{\pi}{2}$.
On lance les deux dés simultanément. On note α et β les nombres qui apparaissent sur les faces supérieures des dés et on appelle X la variable aléatoire qui à chaque lancer associe le nombre sin (α + β).
1°/ Détermine toutes les valeurs prises par X.
2) : Etablir la loi de probabilité de X.

Exercice 9 (Bac SHT Juin 1983)

Un sac contient 6 boules blanches dont 2 sont numérotées 1, 4 numérotées 2 et 4 boules noires dont 3 sont numérotées 1 et 1 numérotée 2.
1°/ On prélève au hasard et simultanément 3 boules de ce sac ; calculer les probabilités des événements suivants :
A : les 3 boules tirées sont blanches.
B : on a tiré 2 boules noires et une blanche.
C : les 3 boules tirées portent le numéro 1.
2°/ Au cours de la même expérience, on appelle X la variable aléatoire égale au nombre de boules noires extraites lors d'un tirage de 3 boules.
Déterminer la loi de probabilité de X, son espérance mathématique et sa variance.
3°/ On tire maintenant une boule du sac et on appelle D l'événement : la boule tirée est blanche et E l'événement la boule tirée porte le N°2. Calculer les probabilités suivantes :
p(D) et p(E). Les événements D et E sont – ils indépendants ?

Exercice 10 (Bac SET Juin 1982)

Un paquet de 13 cartes à jouer comprend 6 as, 3 rois et 4 dames. Les valeurs des cartes sont les suivantes 1 as vaut 5 points, 1 roi vaut 2 points et 1 dame vaut 1 point. L'épreuve consiste à tirer simultanément deux cartes de ce jeu. On appelle X la variable aléatoire qui à tout tirage associe la somme des valeurs tirées.
1°/ Déterminer la loi de probabilité de X.
2°/ Calculer l'espérance mathématique et la variance de X

Exercice 11 (Bac SET Juin 1984)

On dispose de 2 dés cubiques A et B. Le dé A porte sur 2 faces le nombre 6 et sur les autres faces : 0, 1, 2, 3. Toutes les faces ont la même probabilité d'apparaître. Le dé B, pipé, porte les nombres 1, 2, 3, 4, 5, 6. La probabilité d'apparition de chaque face est inversement proportionnelle au nombre marqué su cette face.
1°/ Quelle set la probabilité d'amener un 6 en lançant une fois : a) le dé A ? b) le dé B ?
2°/ On lance simultanément les deux dés et on désigne par X la variable aléatoire égale à la somme des points marqués sur les faces.

a) Déterminer l'ensemble des valeurs prises par X
b) Calculer p ({X = 1}) ; p ({x = 7})

Exercice 12 (Bac SBT Juin 1987)

Un sac contient 4 boules bleues numérotées 0, 1, 2, 3 et 3 boules jaunes portant toutes les trois le numéro 1.
On tire simultanément 2 boules du sac. On suppose que tous les tirages sont équiprobables.
Soit X la variable aléatoire qui à chaque tirage associe la somme des nombres figurant sur les boules tirées.

1) Trouver la loi de probabilité de X.
2) Calculer l'espérance mathématique de X et représenter sa fonction de répartition.

Exercice12.
Soit E = $\{e_1, e_2, e_3\}$ un référentiel associé à une expérience aléatoire p.

1) Combien d'événements peut on envisager sur cet ensemble E ? Préciser ces événements.
2) Déterminer la probabilité de chacun des trois événements élémentaires $\{e_1\}$, $\{e_2\}$, $\{e_3\}$ sachant que : $p(e_1 \cup e_2) = \frac{7}{12}$ et $p(e_2 \cup e_3) = \frac{9}{12}$.

Exercice 13

On considère une population composée de 45% d'hommes et 55% de femmes ; on suppose que 4% des hommes et 0,5% des femmes sont daltoniens : on choisit au hasard une personne dans cette population

1) Quelle est la probabilité que cette personne soit daltonienne ?
2) Sachant que cette personne est daltonienne, quelle est la probabilité qu'elle soit un homme ? Quelle soit une femme ?

Exercice 14 (Bac SHT Juin 1989)

Une urne contient 12 boules : 4 rouges et 8 noires.

1) On tire simultanément 4 boules, soit X le nombre de boules rouges obtenues lors du tirage.
   a) Quelle est la probabilité d'obtenir 4 boules de la même couleur ?
   b) Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X.
   c) Calculer son espérance mathématique.
2) On tire successivement 4 boules en remettant à chaque tirage la boule tirée dans l'urne. Un événement est donc un quadruplet de 4 boules distinctes ou non ; Soit Y le nombre de boules rouges obtenues lors d'un événement.
   a) Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire Y.
   b) Calculer son espérance mathématique et vérifier que E(X) = E(Y).

Exercice 15 (Bac SHT Juin 1990)

Un fermier possède dans sa ferme des chevaux, des vaches, des moutons et des chèvres. On désigne par x, y, z, t respectivement le nombre de chevaux, vaches, moutons et chèvres.
On suppose que les nombres x, y, z, t sont dans cet ordre, les termes consécutifs d'une suite arithmétique.
1°) Sachant qu'il y a 5 chevaux et que le nombre total des animaux de la ferme est 56, déterminer les nombres x, y, z, t.
2°) Un voleur s'infiltre dans la ferme et emporte 3 des animaux. Sachant que le prix de vente des animaux est/ 100000F pour un cheval, 67000F pour une vache, 43000F pour un mouton et 12500F pour une chèvre, déterminer les probabilités des événements suivants :

a) La perte du fermier est minimale.
b) La perte du fermier est maximale.
c) La perte du fermier est 210 000F.

Exercice16 (Bac SBT Juin 1990)

Une cible comprend deux parties désignées par 1 et 2. Un tireur lance une fléchette sur cette cible. Il atteint la partie 2 avec une probabilité $\frac{1}{6}$ et marque alors deux points. Il atteint la partie 1 avec la probabilité $\frac{2}{3}$ et marque alors un point.

1) Quelle est la probabilité pour que le tireur manque la cible ? Il ne marque alors rien.
2) Le tireur lance sa fléchette deux fois. Les deux lancers sont indépendants. Soit X la variable aléatoire qui prend pour valeur la somme des points marqués. Déterminer la loi de probabilité de X, son espérance mathématique et sa variance.
3) Représenter graphiquement la fonction de répartition de X.

Exercice 17

Oumar place dans une boite vide de craies, six boules bleues trois boules rouges et deux boules vertes, indiscernables au toucher

Pour jouer avec son ami, il tire simultanément et au hasard trois boules de la boite.

1) Calculer la probabilité de chacun des évènements suivants :
   A « les boules tirées sont toutes de couleurs différentes »
   B « les boules tirées sont toutes de la même couleur »

2) On appelle X la variable aléatoire qui, à tout tirage de trois boules, associe le nombre de boules bleues tirées. Etablir la loi de probabilité de X. Calculer l'espérance mathématique et l'écart type de X.

Exercice 18

Dans un sac sont placés dix jetons : 6 jetons portent le numéro 1 et les quatre autres portent le numéro 3 .On tire simultanément 6 jetons du sac, les tirages étant supposés équiprobables.

On désigne par X la variable aléatoire qui, à chaque tirage, fait correspondre la somme des numéros marqués sur les trois jetons.

1) Quelles sont les valeurs possibles de X ?
2) Déterminer la loi de probabilité de X.
3) On appelle A l'évènement «la somme des numéros est strictement inférieure à 7 ».
   Calculer la probabilité de A.
4) On recommence quatre fois de suite le tirage précédent en remettant à chaque fois dans le sac les jetons tirés. Quelle est la probabilité pour que l'évènement Ase réalise exactement trois fois ? au moins trois fois ?

Exercice 19 (Bac étrangers juin 2000).

Les deux questions de cet exercice sont indépendantes et on donnera les réponses sous forme de fractions irréductibles.

Une urne contient 6 boules bleues, 3 boules rouges, et 2 boules vertes, indiscernables au toucher.

1) On tire simultanément au hasard 3 boules de l'urne.
   a) Calculer la probabilité de chacun des évènements suivants :
      A= « les boules sont toutes de couleurs différentes »
      B= « les boules sont toutes de la même couleur ».
   b) On appelle X la variable aléatoire qui, à tout tirage de trois boules associe le nombre de boules bleues tirées. Etablir la loi de probabilité de X. calculer l'espérance mathématique de X.

2) Soit k un entier supérieur ou égal à 2.

On procède cette fois de la façon suivante ; on tire au hasard une boule de l'urne, on note sa couleur, puis on la replace dans l'urne avant de procéder au tirage suivant.

On effectue ainsi k tirages successifs. Quelle est la valeur minimale de k pour que la probabilité de ne tirer que des boules bleues soit au moins mille fois plus grande que la probabilité de ne tirer que des boules rouges ?.

Exercice 20 (Bac Liban juin 2000)

Une urne contient 10 boules indiscernables au toucher, 5boules rouges, 3 boules jaunes et 2 boules vertes. Dans les questions 1) et 2) on tire simultanément au hasard 3 boules de l'urne. On donnera les réponses sous forme de fractions irréductibles.

1) a) Calculer la probabilité de chacun des évènements suivants :

A = « les 3 boules sont rouges »

B = « les 3 boules sont de la même couleur ».

C = « les 3 boules sont chacune d'une couleur différente ».

b) On appelle X la variable aléatoire qui, à chaque tirage associe le nombre de couleurs obtenues . Déterminer la loi de probabilité de X. calculer l'espérance mathématique de X.

2) Dans cette question on remplace les 5 boules rouges par n boules rouges où n est un entier supérieur ou égal à 2. L'urne contient donc (n+5) boules, c'est-à-dire, n rouges, 3 jaunes et 2 vertes.
On tire au hasard et simultanément deux boules de cette urne. Soit les évènements suivants :
D = « Tirer deux boules rouges » ; E = « Tirer deux boules de la même couleur » .

a) Montrer que la probabilité de l'évènement D est : $p(D) = \dfrac{n(n-1)}{(n+5)(n+4)}$;

b) Calculer la probabilité de l'évènement E, p(E) en fonction de n..

Pour quelles valeurs de n a-t-on $p(E) \geq \dfrac{1}{2}$?.

Exercice 21

Un jeu de cartes comprend 16 cartes, dont 4 rois ; 4 as ; 4 dames et 4 valets.

1) On tire simultanément 3 cartes des 16 cartes. Calculer la probabilité des évènements suivants :
A = « Avoir exactement 2 Rois » : B = « Avoir 2As et 1 Dame » ; C = « Avoir 2 Valets ou 1 Roi »
E = « Avoir au plus 1 Roi » ; F = « Avoir au moins 2 Dames » ; G = « Avoir 5 As ».

2) On tire successivement 3 cartes sans remise. Calculer la probabilité des évènements suivants :
H = « Avoir exactement 2 Rois » : I = « Avoir 2As et 1 Dame » ; J= « Avoir 2 Valets ou 1 Roi »
K= « Avoir au plus 1 Roi » ; L = « Avoir au moins 2 Dames » ; M = « Avoir 5 As ».

Exercice 22

On lance un dé cubique D1 et D2 dont les faces sont numérotées de 1 à 6. On appelle a le nombre apparaissant sur la face supérieure de D1 et b le nombre apparaissant sur la face supérieure de D2.
Le résultat de l'expérience est le couple (a ; b). On admet l'équiprobabilité des résultats.
1) Donner tous les résultats possibles ;
2) A chaque couple (a ; b) on fait correspondre la valeur absolue de la différence (a–b). On définit ainsi une variable aléatoire X par X = | a – b|.
a) Déterminer les valeurs prises par X
b) Déterminer la loi de probabilité de X
3) Calculer l'espérance mathématique, la variance et l'écart type de X. Pour chaque réponse, on donnera la valeur exacte et une approximation décimale à 10^{-2} près.

Exercice 23

Un objet produit en série a un coût de production de 950F. Il peut représenter à l'issue de sa fabrication, un défaut A, un défaut B, ou en même temps le défaut A ou le défaut B. La garantie permet de faire les réparations aux frais du fabricant, avec le coût suivant :
100F pour un seul défaut A
150F pour le seul défaut B
250F pour les deux défauts A et B.

1°) On prélève un lot de 200 objets. Le défaut A est observé sur 16 objets, le défaut B est observé sur objets et 180 objet n'ont aucun défaut. Reproduire et complèter le tableau suivant :

Nombre d'objets	Avec le défaut A	Sans le défaut A	TOTAL
Avec le défaut B	160	140	12
Sans le défaut B	12	180	188
Total	160	40	200

Pour la suite de l'exercice, on admettra que, sur l'ensemble de la production, 90% des objets n'ont aucun défaut, 4% ont le seul défaut A, 2% ont le seul défaut B et 4% ont les défauts A et B.

2°) On note X la variable aléatoire qui à chaque objet choisi au hasard, associe son prix de revient, c'est-à-dire le coût de production augmenté éventuellement du coût de réparation. Présenter cette variable aléatoire et sa loi de probabilité sous forme d'un tableau.

Valeurs de $X = x_i$				1200
$P(X = x_i)$				

3°)
a) Calculer l'espérance mathématique E(X) et l'écart-type $\sigma(X)$ de cette variable aléatoire.
On admet pour l'usine que tous les objets produits sont vendus.

b) L'usine peut-elle espérer faire des bénéfices en vendant 960 F chaque objet produit ?

c) L'usine veut faire un bénéfice moyen de 100F par objet. Expliquer comment on doit alors choisir le prix de vente de chacun des eux ?.