Calculs barycentriques – Fonction vectorielle de Leibnitz

1. Lignes de niveau

On cherche l'ensemble (E) des points M vérifiant une relation donnée.

Soit A et B deux points fixes de P et k un réel donné.

1. AM = BM — l'ensemble (E) est médiatrice de [AB]
2. AM = k — $k < 0$ l'ensemble (E) est vide
   $k = 0$ E = {A}
   $k > 0$ l'ensemble E est le cercle de centre A est de rayon k.
3. $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM} = 0$ — l'ensemble (E) est le cercle de diamètre AB.
4. $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{u} = k$

Soit B le point de P tel que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{u}$, et H le projeté orthogonal de M sur AB. Le point M appartient à (E) si et seulement si $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AB} = k$, ce qui implique $\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{AB} = k$. D'où $\overline{AH}.\overline{AB} = k$.

L'ensemble (E) est la droite orthogonale à AB au point H défini par $\overline{AH} = \dfrac{k}{\overline{AB}}$.

Cas particulier : L'ensemble (E) des points M vérifiant la relation $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{u} = 0$ est la droite orthogonale à AB en A.

2. Fonction vectorielle de Leibniz

2.1 Définitions

Considérons un ensemble fini de n points fixes $A_1, \dots, A_n$ affectés respectivement de coefficients $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. On appelle système de points pondérés (ou massifs) l'ensemble de couples $\{ (A_1, \lambda_1), (A_2, \lambda_2), \dots, (A_n, \lambda_n)\}$.

Considérons l'application de P dans V, qui, au point M, associe le vecteur :

$$\overrightarrow{f(M)} = \lambda_1 \overrightarrow{MA_1} + \lambda_2 \overrightarrow{MA_2} + \dots + \lambda_n \overrightarrow{MA_n} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \overrightarrow{MA_i}$$

Cette application s'appelle fonction vectorielle de Leibniz du système { (A1, □1), (A2, □2), …, (An, □n)}.

Soit O un point arbitraire de P, $\overrightarrow{MA_i} = \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA_i}$ pour tout i.

On a alors $$\overrightarrow{f(M)} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \left(\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA_i} \right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \overrightarrow{OA_i} + \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \right) \overrightarrow{MO}$$

2.2 Problème

L'ensemble (E) des points M tels que $\overrightarrow{f(M)} = \vec{0}$ contient-il un point et un seul ?

Résolution : $\overrightarrow{f(M)} = \vec{0}$ si et seulement si $\overrightarrow{f(O)} + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \overrightarrow{MO} = \vec{0}$.

L'ensemble (E) tel que $\overrightarrow{f(M)} = \vec{0}$ est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{f(O)} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \ \overrightarrow{OM}$.

Discussion

1[er] cas : Si $\sum \lambda_i = 0$ alors $\overrightarrow{f(M)} = \overrightarrow{f(O)} = \text{cte}$.

- si $\overrightarrow{f(O)} \neq \vec{0}$, l'ensemble (E) est vide.
- si $\overrightarrow{f(O)} = \vec{0}$, (E) contient plus d'un point.

2[ème] cas : Si $\sum \lambda_i \neq 0$, alors $\overrightarrow{f(O)} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \ \overrightarrow{OM}$ si et seulement si $\overrightarrow{OM} = \dfrac{1}{\sum \lambda_i} \overrightarrow{f(O)} = \dfrac{\sum \lambda_i \ \overrightarrow{OA_i}}{\sum \lambda_i}$

L'ensemble E des points M tels que $\overrightarrow{f(M)} = \vec{0}$ contient un élément G et un seul et $\sum \lambda_i \overrightarrow{GA_i} = \vec{O}$

Théorème et définition

$(A_i, \lambda_i)_{i=1,..,n}$ est un système de points pondérés

- Si $\sum \lambda_i \neq 0$, il existe un point G unique tel que $\sum \lambda_i \overrightarrow{GA_i} = \vec{O}$. Ce point G est appelé barycentre de $(A_i, \lambda_i)_{i=1,..,n}$.
- Si $\sum \lambda_i = 0$, le système $(A_i, \lambda_i)_{i=1,..,n}$ n'a pas de barycentre et pour tout point M, $\sum \lambda_i \overrightarrow{MA_i} = \text{cte}$.

Dire que G est le barycentre de $(A_i, \lambda_i)_{i=1,..,n}$ équivaut à dire que, pour tout point O, $\sum \lambda_i \overrightarrow{OA_i} = \sum \lambda_i \overrightarrow{OA_i}$.

Dans le cas où les coefficients λ_i sont égaux, le barycentre est appelé isobarycentre.

2.3 Propriétés du barycentre

- Commutativité : le barycentre G ne dépend pas de l'ordre des points.
- Homogénéité : le barycentre G reste inchangé si l'on multiplie tous les coefficients par un réel non nul.
- Associativité : le barycentre G est inchangé si l'on remplace p points $A_1, \ldots, A_p$ par leur barycentre G' affecté de la somme des coefficients $(\lambda_1 + \ldots + \lambda_p)$, cette somme n'étant pas nulle.

$$(\lambda_1 \overrightarrow{GA_1} + \ldots + \lambda_p \overrightarrow{GA_p}) + (\lambda_{p+1} \overrightarrow{GA_{p+1}} \ldots + \lambda_n \overrightarrow{GA_n}) = \vec{0}$$

Comme $\lambda_1 + \ldots + \lambda_p \neq 0$, il existe un point G' barycentre de $\{ (A_1, \lambda_1), .. (A_p, \lambda_p) \}$, alors

$$(\lambda_1 + \ldots + \lambda_p) \overrightarrow{GG'} + (\lambda_{p+1} \overrightarrow{GA_{p+1}} \ldots + \lambda_n \overrightarrow{GA_n}) = \vec{0}$$

2.4 Coordonnées du barycentre

Le plan P étant rapporté à un repère. Le point A_i a pour coordonnées (x_i, y_i) dans ce repère. Soit G le barycentre du système (A_i, λ_i), i= 1,…,n. On a :

$$\overrightarrow{OG} = \frac{\sum \lambda_i \ \overrightarrow{OA_i}}{\sum \lambda_i}, \quad \text{d'où} \quad x_G = \frac{\sum \lambda_i \ x_i}{\sum \lambda_i} \quad \text{et} \quad y_G = \frac{\sum \lambda_i \ y_i}{\sum \lambda_i}.$$

Remarque : Soit z_i l'affixe de A_i, l'affixe du barycentre G est $z_G = \dfrac{\sum \lambda_i \ z_i}{\sum \lambda_i}$.

2.5 Coordonnées barycentriques

D est la droite définie par deux points A et B du plan P.

Relativement au repère $(A, \overrightarrow{AB})$, la droite D est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AB}$, $t \in$ IR, i.e. $(1-t)\overrightarrow{MA} + t\overrightarrow{MB} = 0$.

Pour tout point M de la droite D, M est le barycentre du système { (A, 1-t) ; (B,t)}.
Réciproquement : à tout couple (α, β), $\alpha + \beta = 1$, correspond le point M de la droite D barycentre de { (A, α), (B, β) }.

Définition

Le couple unique (α, β), $\alpha + \beta = 1$ tel que le point M soit le barycentre de { (A, α), (B, β)} est appelé couple normé de coordonnées barycentriques de M relativement au repère $(A, \overrightarrow{AB})$.

2.6 Exemples de construction géométrique du barycentre

a) Construire le barycentre du système de points pondérés { (A, -2) , (B , 1) }
a) Construire le barycentre du système de points pondérés { (A, 2) , (B , -1) , (C , 3) }
On utilise la propriété d'associativité du barycentre.