EXERCICE 1

1°) Déterminer le module et un argument de chacun des nombres complexes

$$z_0 = 1 + i\ ;\ z_1 = -1 + i\sqrt{3}\ ;\ z_2 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\ ;\ z_3 = \frac{\sqrt{6}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\ ;\ T = \frac{z_2}{z_3}\ ;\ P = z_2 \times z_3$$

2°) Mettre sous algébrique chacun des nombres complexes suivants

$$z_1 = (2 + i)(-1 + i) + (1 + 2i)\ ;\ z_2 = (1 + i\sqrt{3})^3\ ;\ z_3 = \frac{1-3i}{3-i}\ .$$

3°) Mettre sous forme trigonométrique chacun des nombres complexes

$z_1 = \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}i}{2}\right)^{13}$; $z_2 = 1 + i\sqrt{3}$; $z_3 = \frac{(\sqrt{3}+i)^9(1-i)}{(1+i)^2}$; $z_4 = \sin\alpha + i(1+\cos\alpha)$, $\alpha \in [0\ ;\ \pi[$

4°) soit α un nombre réel élément de]0 ; π [. Déterminer le module et un argument de chacun des nombres complexes : $z_0 = 1 - e^{i\alpha}$; $z_1 = 1 + e^{i\alpha}$; $Z = \frac{z_0}{z_1}$; $T = z_0 \times z_1$.

EXERCICE 2

Soient A ; B et M les points du plan complexe d'affixes respectives
$z_A = -2 + i$; $z_B = 2 - 3i$ et $z = x + iy$.

1°) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $\frac{z+2-i}{z-2+3i} = \frac{1}{2}$

2°) Déterminez et construire l'ensemble ($\mathcal{E}_0$) des points M tels que $\left|\frac{z+2-i}{z-2+3i}\right| = 1$

3°) Déterminez et construire l'ensemble ($\mathcal{E}_1$) des points M tels que $MA^2 + MB^2 = 32$

4°) On pose $K = (z+2)(z+1+i)$. Déterminez l'ensemble ($\mathcal{E}_2$) des points M tels que K soit un réel.

EXERCICE 3

1°) Déterminer l'ensemble des images des nombres complexes *z* tels que le nombre complexe A = (1– *z*) (1– iz) soit : a) un réel ; b) un imaginaire pur.

2°) Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}\ ; \vec{j})$ on considère un point M d'affixe z = x + iy , (z ≠ – i) et on pose $P = \frac{z+2}{z+i}$.

a) Écrire P sous la forme algébrique en fonction de x et y.
b) Déterminer l'ensemble (E) des points M du plan tels que :
   - P soit un réel ;
   - P soit imaginaire pur.

3°) Pour tout nombre complexe $z = x + iy$; on pose $Z_0 = \frac{iz+3}{(1+i)z-1}$.

a) Déterminer l'ensemble (E) des points M tels que Z_0 soit un réel
b) Déterminer l'ensemble (F) des points M tels que Z_0 soit un imaginaire pur.

4°) Déterminer l'ensemble des images des complexes z tels que les images des nombres complexes : i ; z ; iz soient alignées.

EXERCICE 4

Soit f l'application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie par f (z) = $z^4 - \sqrt{2}\,z^3 - 4\sqrt{2}\,z - 16$

1°) Trouver les réels a et b tels que f (z) = $(z^2 + 4)(z^2 + az + b)$

2°) En déduire l'ensemble des solutions de l'équation f (z) = 0

3°) Placer dans le plan rapporté au repère orthonormé $(o, \vec{u}\ ;\ \vec{v})$ les images A ; B ; C ; D des solutions de f (z) = 0 ; puis préciser que ces points appartiennent à un même cercle dont on précisera le centre et le rayon.

EXERCICE 5

1°) Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

a) $z^2 + 3(1 + i)z + 5i = 0$; b) $z^2 - (5+3i)z + 4 + 7i = 0$; c) $iz^2 - 2z - 4 - 4i = 0$

d) $z^2 - (1 - i)z - 18 + 13i = 0$; e) $z^2 + (1+6i)z + (1 + 23i) = 0$;

f) $z^4 - (5 - 14i)z^2 - (24 + 10i) = 0$; g) $z^4 + z^2 + 1 = 0$; h) $z^6 - (1-i)z^3 - i = 0$

h) $(2iz + 3 - i)^2 + (z + 1 + 5i)^2 = 0$; i) $z^3 = 8i$; j) $z^3 = -\sqrt{2} + i\sqrt{6}$;

k) $z^6 = 4\sqrt{2}(-1 + i)$; l) $z^4 = 2\left(-1 + i\sqrt{3}\right)$

2°) – a) Déterminer les solutions complexes de l'équation : $z^4 = 8(1 - i\sqrt{3})$ les écrire sous forme trigonométrique ;

b) Vérifiez que a = $\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2} - i\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$ est une racine quatrième de $8(1 - i\sqrt{3})$.

En déduire la forme algébrique des solutions de l'équation précédente.

EXERCICE 6

Soient les complexes $z_1 = 1 - i$ et $z_2 = \dfrac{\sqrt{6} - i\sqrt{2}}{2}$

1°) Mettre sous forme trigonométrique z_1 ; z_2 ; $\dfrac{z_2}{z_1}$; $z_1 \times z_2$.

2°) En déduire que $\cos\dfrac{\pi}{12} = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ et que $\sin\dfrac{\pi}{12} = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

3°) On considère l'équation d'inconnue réelle x

$$(\sqrt{6}+\sqrt{2})\cos x + (\sqrt{6}-\sqrt{2})\sin x = 2$$

Résolvez cette équation dans $\mathbb{R}$; puis placez les points images des solutions sur le cercle trigonométrique.

EXERCICE 7

1°)Soit z et **Z** les nombres complexes définis par : $z=\sqrt{1+\sqrt{2}}+i\sqrt{\sqrt{2}-1}$ et **Z** = z^4

Déterminer les racines quatrièmes de Z sous forme trigonométrique.

En déduire les valeurs exactes de Cos $\frac{\pi}{8}$ et Sin $\frac{\pi}{8}$.

2°) Déterminer A= $(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2})^{1987}$; B = $(\frac{-1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2})^{1992}$

3°) Déterminer et construire l'ensemble (**E**) des points M du plan dont l'affixe z vérifie la condition proposée :

a) $|z+1+2i|=|z-4|$; b) $|z-3i|=2$; c) $|\bar{z}-2+i|=1$; d) $|(1+i)z-2i|=2$.

EXERCICE 8

1°) a) Calculer les nombres: a = i^4 ; b = i^5 ; c = i^6 ; d = i^7.

b) En déduire les valeurs de : i^{4n} ; i^{4n+1} ; i^{4n+2} ; i^{4n+3} avec ($n \in \mathbb{N}$).

c) Calculer : A = i^{60} ; B = i^{149} ; C = i^{134} ; D = i^{167} ;

E = i^{156} ; F = i^{205} ; G = i^{94} ; H = i^{215}.

2°) a) Linéariser : $\cos^5 x$; $\sin^5 x$; $\cos^3 x$; $\sin^3 x$.

c) Écrire cos(4x) en fonction de sinx .
d) Écrire sin(4x) en fonction de sinx et cosx .
e) Écrire cos(3x) en fonction de cosx .
f) Écrire sin(3x) en fonction de sinx .
g) En déduire une linéarisation de :

H = cos(4x)sinx ; G = $4\cos^3 x - 3\cos x - 4\sin^3 x + 3\sin x$;

K = $\cos(3x)\sin^2 x$; L = $\sin(3x)\sin^2 x$;

4°) Linéariser les expressions suivantes :

A = $\cos^2 x\sin^3 x$; B = $\sin 3x\cos^2 x$; C = $\cos x\sin^4 x$; D =$\sin^4 x + \sin^2 x$;

E = $\cos^2 x \sin^5 x$; F = $\cos^3 x \sin^3 x$; G = $\cos^3 x \sin^2 x$; H = $\cos^4 x + \sin^4 x$.

EXERCICE 9

Le plan est orienté et rapporté au repère orthonormé direct. Soit A et B deux points distincts d'affixes respectives **a** et **b**

1- construire le point M_1 dont l'affixe z_1, vérifie : $\frac{z_1 - a}{z_1 - b} = -1$

2- construire le point M_2 dont l'affixe z_2, vérifie : $\frac{z_2 - a}{z_2 - b} = 2$

3- construire le point M_3 dont l'affixe z_3, vérifie : $\frac{z_3 - a}{z_3 - b} = i$

4- construire le point M_4 dont l'affixe z_4, vérifie : $\frac{z_4 - a}{z_4 - b} = -i$

EXERCICE 10

1– Pour tout complexe z distinct de 1, on appelle A ; M et M' les points d'affixes respectives 1 ; z ; z^2. Déterminer les points M tels que le triangle AMM' soit équilatéral.
2 – Déterminer les racines cubiques du nombre complexe i sous forme trigonométrique et algébrique.

En déduire la résolution dans $\mathbb{C}$ de l'équation : $[(1-2i)z]^3 - i = 0$

3– Calculer le module et l'argument du nombre complexe $u = \frac{1}{1 + i\,tg\,\theta}$.

(On discutera suivant les valeurs de θ).

EXERCICE 11

Pour chaque réel $\alpha \in \left] -\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2} \right[$, on définit l'application

$$f_\alpha : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$$

$$Z \mapsto f_\alpha(z) = z^2\cos^2\alpha - 2z\cos\alpha + 1 + \sin^2\alpha \quad .$$

Dans le plan affine euclidien muni d'un repère orthonormé (o,i,j) on désigne par (E) l'ensemble des points M d'affixes z telle qu'il existe $\alpha \in \left] -\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2} \right[$, vérifiant $f_\alpha(z) = 0$.

1-a) résolvez dans $\mathbb{C}$ l'équation $f_\alpha(z) = 0$.

b) si le point M(z) appartient à (E), que peut-on dire du point M' d'affixe $\bar{z}$?

2- Pour $\alpha \in \left] -\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2} \right[$ fixé on pose : $Z = \frac{1}{2} i(z' + z'')$ où z' et z'' sont les solutions de l'équation $f_\alpha(z) = 0$. Déterminer les racines quatrièmes de *Z* et représenter les points images sur un cercle.

EXERCICE 12

Soit l'application $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$

$$Z \mapsto f(z) = z^3 - 3(1+i)z^2 + (3+10i)z + 3(1-3i)$$

1– Déterminer les nombres complexes a, b ; et c pour que

$$f(z) = (z - 1 - i)(az^2 + bz + c)$$

2– résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation f (z) = 0

3– Montrer que les points images dans le plan complexe, des solutions de cette équation sont alignés.

EXERCICE 13

Soit le polynôme complexe P (z) de la variable complexe z

$P(z) = z^3 - (7 + 9i)z^2 + (39i - 14)z + 50$

1-Montrer que l'équation P (z) = 0 admet une racine z_0 imaginaire pure.

2- Résoudre l'équation P (z) = 0. On notera z_1 la racine non imaginaire pur ayant la plus petite partie réelle et z_2 la troisième.

3-Dans le plan affine euclidien rapporté au repère (o , i , j) orthonormé on considère les points A, B, et C d'affixes respectives z_0 ; z_1 ; z_2. Déterminer et construire l'ensemble des points M du plan tels que : $MA^2 - MB^2 + MC^2 = 4$.

EXERCICE 14

1– Soit le polynôme $P(z) = z^3 - (3 + 6i)z^2 - (9 - 15i)z + 22 - 6i$

a) Montrer que l'équation P (z) = 0 admet une racine réelle que l'on déterminera.

b) En déduire une résolution dans $\mathbb{C}$ de P (z) = 0 ;

c) Soient A ; B ; C les images respectives des solutions de P(z) =0. Placer dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé ces points et en déduire la nature du triangle ABC. Donner une équation cartésienne du cercle (**C**) circonscrit au triangle ABC.

2– Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation $z^4 + 10z^2 + 169 = 0$.

3– Résoudre dans $\mathbb{C}$ les systèmes :

a) $\begin{cases} 5iz + (2-i)z' = 1 + 12i \\ (2-3i)z + (5-2i)z' = 39 - 10i \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2iz + (1-3i)z' = 14 + 6i \\ (1-i)\overline{z} + (5-2i)\overline{z'} = 4 - 18i \end{cases}$ c) $\begin{cases} (1+i)z_1 + 2i\overline{z_2} = 3 - i \\ 2z_1 + 3\overline{z_2} = 5 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2iz + 2z' = 4 - 4i \\ (1+i)z - 2z' = -5 + 7i \end{cases}$; e) $\begin{cases} 2z_1z_2 = 3 \\ \dfrac{1}{z_1} + \dfrac{1}{z_2} = \dfrac{2\sqrt{2}}{3} \end{cases}$; f) $\begin{cases} z_1 + z_2 + z_3 = 1 \\ z_1z_2 + z_1z_3 + z_2z_3 = 1 \\ z_1z_2z_3 = 1 \end{cases}$

4– Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

a) $z^7 = \dfrac{(4+4i)^3}{(1+i\sqrt{3})^4}$ b) $z^5 = \dfrac{\left[1-2\sqrt{3}+i(2+\sqrt{3})\right]^7}{(2-i)^7(\sqrt{2}+i\sqrt{6})^2}$

EXERCICE 15

Soit le polynôme complexe $P(z) = (z^2 + 3z)^2 + (3z + 5)^2$.
1) Factoriser P(z) en un produit de deux polynômes du second degré à coefficients complexes.

2) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 + 3(1+i)z + 5i = 0$

3) En déduire la résolution dans $\mathbb{C}$ de l'équation $P(z) = 0$; puis montrer que P(z) est le produit de deux polynômes du second degré à coefficients réels.

EXERCICE 16

Le plan rapporté au repère orthonormé $(o, \vec{u} ; \vec{v})$

1– Résolvez dans $\mathbb{C}$ l'équation $(z + \frac{1}{2} + i)^2 + \frac{1}{4} = 0$

2– On donne les points A (–1 ;–5) et B$(\frac{1}{3};\frac{1}{6})$. A tout point M d'affixe z, $(z \neq -1-5i)$ on associe le point M' d'affixe Z tel que : $Z = 3i \times \left(\dfrac{z - \frac{1}{3} - \frac{1}{6}i}{z + 1 + 5i} \right)$

a) Déterminer l'ensemble (Γ) des nombres complexes tels que $\mathbf{Z} = z$

b) Déterminer l'ensemble (E) des points M tels que :$| Z | = 3$;

c) Déterminer l'ensemble (Δ) des points M tels que M' décrit le cercle de centre l'origine O du repère et de rayon 1 ;

d) Déterminer et construire l'ensemble (F) des points M tels que M' décrit le demi axe $[o, \vec{u})$ privé de {0}.

EXERCICE 17

Soit α un nombre réel appartenant à $]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$. on considère l'équation d'inconnue z complexe (E) : $(1+iz)^3 (1- i\,tg\,\alpha) = (1-iz)^3(1+i\,tg\,\alpha)$

1- soit z une solution de (E)

a) Montrer que $|1+iz| = |1- iz|$.

b) En déduire que z est un réel.

2- a) Exprimer $\dfrac{1+itg\alpha}{1-itg\alpha}$ en fonction de $e^{i\alpha}$

b) Soit z un nombre réel, on pose $z = tg\,\varphi$ où $\frac{-\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}$.

Ecrire l'équation portant sur φ traduisant (E) et le résoudre.

c) Déterminer les solutions z_1 ; z_2 ; z_3 de (E).

EXERCICE 18

Soit u le nombre complexe défini par u = cosθ + i sinθ où $\theta \in]-\pi ; \pi]$

1- Calculer le module et un argument de $\frac{1-u}{1+u}$ (On discutera suivant les valeurs de θ)

2-En déduire le module et un argument de z tel que : u = $\frac{2+iz}{2-iz}$

3- Résoudre $(2+iz)^6 = (2-iz)^6$.

EXERCICE 19

Le plan rapporté au repère orthonormé $(o, \vec{u} ; \vec{v})$

1– Trouvez l'ensemble des points M d'affixe z tels que les points images des nombres complexes 1 ; z ; $1+z^2$ soient alignées.

2– On désigne par M le point d'affixe z et M' le point d'affixe **Z** tel que **Z** = $\frac{z+1}{z-1}$

a) Trouver l'ensemble (D) des points M tel que Z soit un réel ;

b) Trouver l'ensemble ($\mathcal{C}$) des points M tel que Z soit un imaginaire pur ;

c) Trouver l'ensemble (Γ) des points M tel que O ; M ; M' soient alignés.

EXERCICE 20

Soit l'équation dans $\mathbb{C}$: $z^3 - 2z^2 - iz + 3 - i = 0$

1) Montrer que l'équation admet dans $\mathbb{C}$ une solution réelle.

2) En déduire la résolution dans $\mathbb{C}$ de cette équation.

3) Soient A **;** B **;** et C les points images de ces solutions dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé. Déterminer la nature du triangle ABC**.**

4) Déterminer l'affixe de l'isobarycentre G de ce triangle.

EXERCICE 21

Soit l'application f : z $\mapsto$ f (z) = $f : z \mapsto f(z) = \frac{iz}{z+i}$; $z \neq -i$

1- Déterminer les coordonnées du point B dont l'affixe z_0 est telle que : $f(z_0) = 1 + 2i$

2- Soit $z \in \mathbb{C} - \{-i\}$. On note r le module de z+i et α une mesure de son argument. Donner la forme trigonométrique de f (z) – i en fonction de r et α.

3- Soit A le point d'affixe – i.

a) Déterminer l'ensemble ($\mathcal{E}$) des points M vérifiant: | f (z)-i | **=** $\sqrt{2}$ et l'ensemble (D) des points M tels que $\frac{\pi}{4}$ soit une mesure l'argument de f (z) – i.

b) Montrer que B appartient à ($\mathcal{E}$) et (D) puis construire ($\mathcal{E}$) et (D).

4- à tout point d'affixe $Z = (\sqrt{2-\sqrt{2}} - i\sqrt{2+\sqrt{2}})z$. Déterminer l'ensemble ($\mathcal{E}$) des points M tels que |Z| = 8.

5– résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation $z^2 - (1 + i\sin 2\theta)\, z + \frac{1}{2} i\sin 2\theta = 0$ où θ est un paramètre réel. En discutant selon les valeurs de θ , on écrira les solutions z_1 et z_2 de cette équation sous la forme trigonométrique.

EXERCICE 22

1°) Ecrire sous forme algébrique le nombre complexe $z = 7 - i + \dfrac{5}{(1-7i)(i-1)}$

2°) Ecrire sous forme trigonométrique le nombre complexe t dans les cas suivants :

a) $t = \dfrac{(1+i)^4}{(1+i\sqrt{3})(\sqrt{3}-i)}$; b) $t = -2e^{i\frac{2\pi}{3}}$; c) $t = \dfrac{1+e^{i\frac{2\pi}{3}}}{1-e^{i\frac{2\pi}{3}}}$.

3°) a) Déterminer les racines sixièmes de l'unité ; puis les écrire sous formes Trigonométrique et algébrique.

b) Calculer $(1-i)^6$.

c) En déduire les racines sixièmes du complexe T = 8i sous formes trigonométrique et algébrique.

EXERCICE 23

1°) a) Vérifier que $(2 + i)^4 = -7 + 24i$

b) Trouver les racines quatrièmes de 1

c) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^4 + 7 - 24i = 0$

2°) Soit l'équation (E) : $z^3 - 2iz^2 - 9z + 18i = 0$

a) Montrer que (E) admet une solution imaginaire pure z_0 que l'on déterminera.

b) Résoudre (E).

3°) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 + z - 1 + 3i = 0$.

EXERCICE 24

Le plan est muni d'un repère orthonormé.

A est le point d'affixe z =1+2i ; B est le point d'affixe t = 1+5i

C est le point d'affixe k = 4+2i. On pose $Z = \dfrac{k-z}{t-z}$

1°) Que représente |Z| ?

2°) Que représente arg (Z) ?

3°) Calculer Z et en déduire la nature du triangle ABC

4°) Déterminer l'ensemble ($\mathfrak{I}$) des points M d'affixe m tels que $|m-z| = |\overline{m}-t|$.

EXERCICE 25

1) Déterminer dans $\mathbb{C}$ les racines carrées de u = 7 + 24i.

2) Les racines z_1 et z_2 d'une équation du second degré à cœfficients complexes vérifient : $\begin{cases} z_1 + z_2 + z_1 z_2 = 4 \\ \dfrac{z_1 + z_2}{z_1 z_2} = 1 \end{cases}$. Former cette équation et la résoudre dans $\mathbb{C}$.

EXERCICE 26

I) Soit le complexe $Z=(\sqrt{3}+1)+i(\sqrt{3}-1)$.

1°) Déterminer le module et un argument de z^2 . En déduire le module et un argument de z.

2°) Déduire de ce qui précède les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ *et* $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

3°) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $\left(\sqrt{3}+1\right)\cos x+\left(\sqrt{3}-1\right)\sin x=\sqrt{2}$

II) 1°) Trouver l'ensemble des points M(x ;y) du plan d'affixe z tel que :

$Z^2 + 2z - 3$ soit un réel .

2°) Déterminer l'ensemble des nombres z tels que : $\frac{z+2i}{z-4i}$ soit réel (on suppose $z \neq 4i$).

EXERCICE 27

On pose $P(z)= z^4 -6z^3 + 23z^2 -34z + 26$.

1°) α désigne un complexe quelconque. Montrer que $P(\overline{\alpha})=\overline{P(\alpha)}$.

Déduisez que si P(α) = 0, alors P($\overline{\alpha}$) = 0.

2°) Calculer P(1–i) ; en déduire les solutions de l'équation P(z) = 0

3°) Placer les points images des solutions de l'équation f(z) = 0 dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(O\ ;\ \vec{u}\ ;\ \vec{v}\right)$.

4°) Montrer que tous ces points appartiennent à un même cercle dont on précisera le centre et le rayon (points cocycliques).

EXERCICE 28

On donne $A=5\sqrt{2}(1+i)$; $B=-5(1+i\sqrt{3})$

1°) Déterminer le module et un argument des nombres complexes :A ; B ; $\overline{A}$; $\frac{1}{A}$.

2°) Soit Z le complexe tel que A Z = B. Écrire Z sous forme algébrique puis sous forme trigonométrique.

3°) En déduire les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{13\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{13\pi}{12}\right)$

EXERCICE 29

Soit l'équation (E) : $z^3-10z^2+36z-40=0$.

1°) Vérifier que 2 est une solution de l'équation (E).

2°) Trouver les réels a ; b ; c tels que : $z^3-10z^2+36z-40=(z-2)(az^2+bz+c)$.

3°) En déduire la résolution dans $\mathbb{C}$ de l'équation (E).

4°) On pose $z_A=2$; $z_B=4-2i$; $z_C=4+2i$. Placer les images respectives A ; B ,C dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé.

5°) Calculer $|z_C-z_A|$; $|z_C-z_B|$; $|z_A-z_B|$. En déduire la nature du triangle ABC.

EXERCICE 30

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé, on considère le polynôme complexe $f(z) = z^3 - (5+i)z^2 + 2(5+3i)z - 4(2+4i)$.

1°) Calculer $f(2i)$. Que peut-on conclure ?

2°) Trouver les complexes a ; b ; c tels que $f(z) = (z-2i)(az^2 + bz + c)$.

3°) a) Calculer $(1+2i)^2$.

b) En déduire la résolution de l'équation $f(z) = 0$.

4°) Soient A ; B ; C les points d'affixes respectives 2i ; 3+i ; 2–2i.

a) Placer les points A ; B ; C.

b) On pose $Z = \dfrac{z_C - z_B}{z_A - z_B}$. Donner la forme algébrique de Z. en déduire le module et un argument de Z.

c) Interpréter le module et un argument de Z.

5°) Soit D le point d'affixe z_D tel que $z_D - z_C = z_A - z_B$. Déterminer les coordonnées de D puis le placer sur la figure précédente.

6°) En déduire la nature du quadrilatère ABCD.

EXERCICE 31

Le plan est muni d'un repère orthonormé (unité graphique = 1cm).
Soit le polynôme complexe $f(z) = z^3 - (5+8i)z^2 - (13-32i)z + 57 - 24i$
1°) Montrer que l'équation $f(z) = 0$ admet une solution réelle α.
2°) Déterminer les complexes P et Q tels que $f(z) = (z-\alpha)(z^2 + Pz + Q)$.

3°) En déduire la résolution dans $\mathbb{C}$ de l'équation $f(z) = 0$. (On notera z_A la solution réelle ; z_B la solution non imaginaire dont la partie réelle est positive ; et z_C la troisième solution).
4°) Soient A ; B ; C les points images respectives des solutions z_A ; z_B ; z_C de l'équation $f(z) = 0$. Placer ces points dans le plan complexe. En déduire la nature du triangle ABC.
5°) Déterminer les coordonnées du point I d'affixe z = x + iy tel que :

$$|z - z_A| = |z - z_B| = |z - z_C|.$$

6°) Déterminer et construire l'ensemble (Q) des points M(x ; y) du plan tel que :

$$MA^2 + MC^2 = 32.$$

7°) Soit D le point d'affixe $z_D = -1 - 3i$.

a) Déterminer la nature du polygone ABCD.
b) Calculer le périmètre et l'aire du polygone ABCD.

EXERCICE 32

Soit le polynôme complexe $P(z)= z^3 – iz^2 – 11z + 51i$

1) Calculez P(3i)
2) Déterminez les complexes a et b tels que $P(z) = (z – 3i) (z^2 +az + b)$
3) Résoudre dans C l'équation P(z) = 0
4) Placez dans le plan complexe les points A, B , C d'affixes respectives :
   $Z_A = 3i$; $Z_B = – 4 –i$; $Z_C = 4 – i$.
5) a) Calculez $|Z_B – Z_A|$; $|Z_C – Z_A|$; $|Z_C – Z_B|$.
   b) En déduire la nature du triangle ABC.
6) Déterminez et construire l'ensemble (E) des points M du plan tels que :

$$MB^2 + MC^2 = 64.$$

EXERCICE 33

On désigne par $\mathbb{C}$ des nombres complexes. On pose :

$$f(z) = z^3–(3+3i)z^2 –(2–9i)z + 8 – 6i \ ; \ z \in \mathbb{C}$$

1°) Montrer que l'équation f(z)= 0 admet une solution réelle m.

2°) Déterminer le polynôme g(z) à coefficients complexes tel que:f(z)=(z–m)g(z).

3°) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : f(z)=0.

EXERCICE 34

On veut déterminer trois nombres complexes. Les modules de ces trois nombres forment une suite géométrique de raison 2, et leurs arguments une suite arithmétique de raison $\frac{2\pi}{3}$. Déterminer ces trois nombres z_1 ; z_2 ; z_3 sachant que leur produit est $z_1 \, z_2 \, z_3 = 4 + 4i\sqrt{3}$; et que l'argument de z_1 appartient à $]\, 0 \,;\, \frac{\pi}{2} [$. On donnera la réponse sous forme trigonométrique.

EXERCICE 35

Soient trois nombres complexes $Z_1=[r_1 ;\theta_1]$; $Z_2=[r_2 ;\theta_2]$; $Z_3=[r_3 ;\theta_3]$ tels que les modules r_1 ; r_2 ; r_3 forment une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et les arguments θ_1 ; θ_2 ; θ_3 forment une suite arithmétique de raison $\frac{\pi}{3}$. Déterminez ces trois nombres complexes Z_1 ; Z_2 ; Z_3 sachant que leur produit est $Z_1Z_2Z_3 = –i$ et que $\theta_1 \in]\, 0 \,;\, \frac{\pi}{2} [$. On donnera les nombres complexes Z_1 ; Z_2 ; Z_3 sous forme trigonométrique ; algébrique et exponentielle.