

RÉSOLUTION DE SYSTÈMES D'ÉQUATIONS

1. Rappels

1.1 Résolution d' un système de deux équations à deux inconnues

Pour résoudre dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ le système :

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

On peut procéder par substitution, par combinaison, par la méthode du déterminant.

1.1.1 Exemple de résolution par substitution

On tire x ou y dans l'une des équations, on porte cette valeur dans l'autre équation . On obtient une équation à une inconnue.

Exemple

Résoudre dans \mathbb{R}^2 :

$$\begin{cases} x + y = 2 \quad (E_1) \\ x - y = 2 \quad (E_2) \end{cases}$$

a) Réponse :

Dans E_2 , on obtient $x = y + 2$, en portant cette valeur dans (E_1) , on obtient $y + 2 + y = 2$. Ce qui donne $y = 0$.
donc $x = 2$. On a : $S = \{(2 ; 0)\}$.

1.1.2 Exemple de résolution par combinaison

Soit à résoudre dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ le système :

$$\begin{cases} x - 3y = 0 \\ 2x + y = 7 \end{cases}$$

On multiplie la première équation par -2 et on additionne membre à membre. On obtient :

$7y = 7$. Ce qui donne $y = 1$; donc, $x - 3(1) = 0$. On obtient $x = 3$.

Finalement, l'ensemble des solutions est ; $S = \{(3 ; 1)\}$.

1.1.3 Méthode du déterminant

Pour résoudre le système

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

on calcule les trois nombres

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = ab' - a'b \quad \Delta_x = \begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix} = cb' - c'b \quad \text{et} \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix} = ac' - a'c$$

Si $\Delta \neq 0, S = \left\{ \frac{\Delta_x}{\Delta}; \frac{\Delta_y}{\Delta} \right\}$

Si $\Delta = 0, \Delta_x \neq 0$ ou $\Delta_y \neq 0$ $S = \emptyset$ Si $\Delta = 0, \Delta_x = \Delta_y = 0$ le système est équivalent à $ax + by = c$

En posant $x = \lambda, (si b \neq 0) \Rightarrow y = \frac{c - a\lambda}{b}$ $S = \left\{ \left(\lambda; \frac{c - a\lambda}{b} \right) \lambda \in \mathbb{R} \right\}$

1.2 Résolution d' un système d'inéquations à deux inconnues

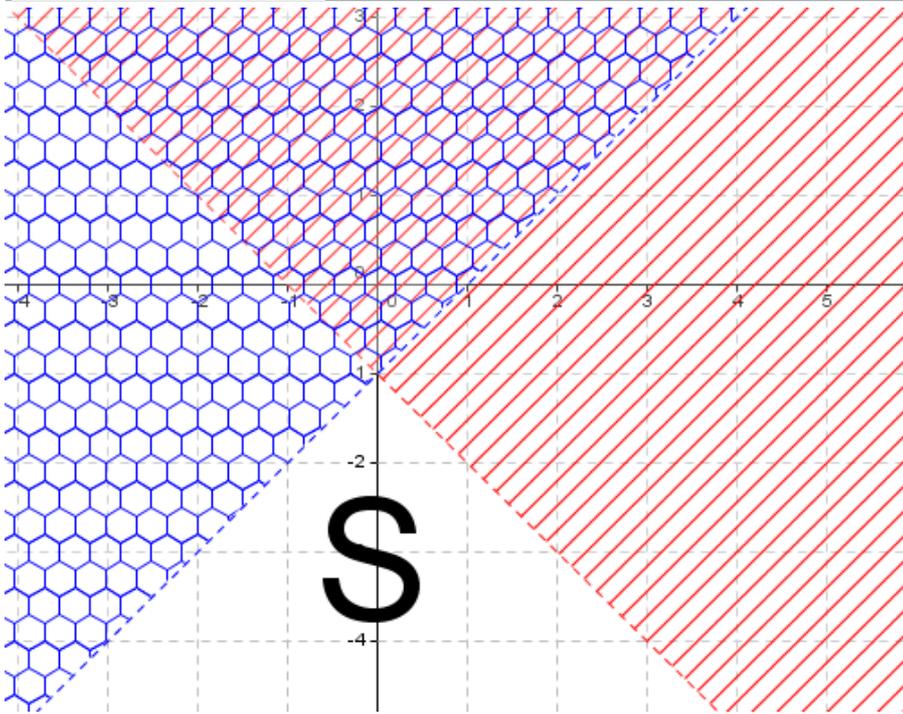
1.2.1 un exemple avec géogebra.

Résoudre graphiquement le système :

$$\begin{cases} x + y < -1 \\ x - y > 1 \end{cases}$$

Réponse :

- ◆ On saisit la première inéquation, puis on valide.
- ◆ Dans le menu propriété, on inverse le remplissage.
- ◆ On saisit la deuxième inéquation , puis on valide.
- ◆ On inverse aussi le remplissage.
- ◆ La solution est la partie non hachurée.



Dans le cas général, pour résoudre un système ,

- on « égalise » à zéro chaque inégalité
- on choisit un point arbitraire pour vérification
- on hachure les parties inutiles
- la solution est la partie non hachurée.

1.2.2 Exemple de programmation linéaire

2. Système de trois équations à trois inconnues.

Soit à résoudre le système :

$$(S_1) \begin{cases} ax + by + cz = d & (L_1) \\ a'x + b'y + c'z = d' & (L_2) \\ a''x + b''y + c''z = d'' & (L_3) \end{cases}$$

La meilleure méthode (et c'est celle du programme) est celle dite de Gauss

Description (simplifiée) de la méthode :

1^{ère} étape : Elimination

On élimine à l'aide de (L₁) une des inconnues, par exemple x dans L₂ et L₃

On obtient alors un système (S₂) équivalent à (S₁), de la forme

$$\begin{cases} ax + by + cz = d & (L_1) \\ b'_1y + c'_1 = d'_1 & (L'_2) \\ b''_1y + c''_1z = d''_1 & (L''_3) \end{cases}$$

2^e étape :

A l'aide de (L'₂) on élimine dans (L''₃) l'une des inconnues. On obtient alors un système de la forme :

$$\begin{cases} ax + by + cz = d \\ b'_1y + c'_1 = d'_1 \\ c''_2z = d''_2 & (L''_3) \end{cases}$$

équivalent à (S₁)

3^e étape : substitution remontante

On détermine z à partir de (L''₃), puis on substitue dans (L''₂)

On refait les mêmes opérations pour y et x.

Exemple :

Résoudre dans IRXIRXIR le système :

$$\begin{cases} x + y + z = 3 & (L_1) \\ x - y + 2z = 2 & (L_2) \\ x - 2y - z = -2 & (L_3) \end{cases}$$

Réponse :

$$\begin{aligned} (L_1) &\rightarrow \begin{cases} x + y + z = 3 \\ 2y - z = 1 & (L'_2) \\ 3y + 2z = 5 & (L'_3) \end{cases} \\ (L_1 - L_2) &\rightarrow \\ (L_1 - L_3) &\rightarrow \end{aligned}$$

$$(2L'_2 - L'_3) \rightarrow \begin{cases} x + y + z = 3 \\ 2y - z = 1 \\ 7y = 7 \end{cases}$$

$$\text{ce qui donne } \begin{cases} y = 1 \\ 2 - z = 1 \\ z = 1 \\ x = 1 \end{cases}$$

$$\text{d'où } S = \{(1,1,1)\}$$