Fonctions continues

1. Continuité en un point x_0

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de IR, et $x_0 \in I$, distinct des extrémités de I

1.1 Définition :

f est continue en x_0 si f admet une limite finie en x_0 et cette limite est $f(x_0)$, autrement dit, f est continue en x_0 si et seulement si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

Une fonction qui n'est pas continue en a est dite discontinue en a.

Exemple : Soit f la fonction définie par $\begin{cases} f(x) = \dfrac{x^2 - x - 2}{x+1} & \text{si} \quad x \neq -1 \\ f(-1) = -3 \end{cases}$

f est elle continue en x_0 = -1 ?

$$\lim_{x \to -1} f(x) = \lim_{x \to -1} \frac{(x-2)(x+1)}{(x+1)} = \lim_{x \to -1} x - 2 = -3 = f(-1)$$

Donc f est continue en x_0 = -1

1.2 Continuité à gauche – Continuité à droite :

- Si f est définie sur $[x_0 ; x_0 + \alpha[, \quad \alpha > 0$, f est continue à droite en x_0 si la $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$

- Si f est définie sur $]x_0 - \alpha ; x_0]$, f est continue à gauche en x_0 si $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$

On rappelle que f admet une limite en x_0 si et seulement si $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$

Donc f est continue en x_0 si et seulement f est continue à gauche en x_0 et continue à droite en x_0, c'est-à-dire si et seulement si $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$

(on utilise cette définition dans le cas où les expressions de f(x) sont différentes à gauche e t à droite de a)

Exemple :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{1}{x-1} & \text{si} \quad x > 0 \\ f(x) = 2x - 1 & \text{si} \quad x \leq 0 \\ f(0) = -1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} (2x - 1) = -1$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x-1} = -1$$

$$f(0) = -1$$

Donc f est continue en x_0=0

2. Continuité sur un intervalle

2.1 Définition

On dit que f est continue sur $]a,b[$ si elle est continue en chaque point de cet intervalle.

f est continue sur $[a,b]$, si elle est continue sur $]a,b[$, continue à droite en a et continue à gauche en b.

Graphiquement, une fonction est continue si la courbe représentative de cette fonction est continue.

2.2 Continuité des fonctions usuelles

- Toute fonction constante est continue sur IR .
- La fonction identité $x \mapsto x$ est continue sur IR.
- La fonction racine carrée $x \mapsto \sqrt{x}$ est continue sur [0 ; +∞ [
- Les fonctions sinus et cosinus sont continues sur IR.

2.3 Opérations sur les fonctions continues

Si f et g sont continues sur un intervalle I, alors $f+g,\ \lambda.f\,(ou\ \lambda \in R)\ et\ f.g$ sont continues sur I.

Si de plus g ne s'annule pas sur I, alors $\frac{f}{g}$ est continue sur I.

Si f est continue sur I et g continue sur J = f(I), alors g o f est continue sur I.

Conséquences

- Toute fonction polynôme est continue sur IR .
- Toute fonction rationnelle est continue sur son domaine de définition.
- Si f est continue et positive sur I, alors $\sqrt{f}$ est continue sur I.
- La fonction tangente est continue sur son domaine de définition.

Ces résultats découlent des propriétés des limites

2.4 Prolongement par continuité.

Soit I un intervalle de IR, x_0 un élément de I, et f une fonction définie sur I - $\{x_0\}$.

Si f admet une limite finie en x_0, c'est-à-dire $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ est finie, alors f est prolongeable par continuité en x_0

On obtient une fonction continue g en posant :

$$\begin{cases} \mathbf{g(x) = f(x)} & \mathbf{si} \quad \mathbf{x \neq x_0} \\ \mathbf{g(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)} \end{cases}$$

Cette fonction g, continue en x_0, est appelée prolongement de f par continuité en x_0

2.5 Propriétés des fonctions continues sur une intervalle

Théorème

Si f est continue sur $[a,b]$ alors l'image de $[a,b]$ par f est un intervalle

Théorème des valeurs intermédiaires

Soient a et b deux éléments de l'ensemble de définition de f tels que a < b.

Si f est continue sur $[a,b]$ alors quel que soit y_0 appartenant à $[f(a);f(b)]$ ou $[f(b);f(a)]$, il existe au moins $c \in [a,b]$ vérifiant $f(c) = y_0$; en d'autres termes, quel que soit $y \in [f(a);f(b)]$ ou $[f(b);f(a)]$, l'équation $y_0 = f(x)$ admet au moins une solution $c \in [a,b]$.

Si, de plus, f est strictement monotone, cette solution est unique.

Cas particuliers :

- Si f est continue sur $[a,b]$ et $f(a).f(b) < 0$ l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution dans l'intervalle $]a,b[$
- Si f est continue et strictement monotone sur $[a,b]$ et $f(a).f(b) < 0$ l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique dans l'intervalle $]a,b[$, i.e, il existe au moins un réel unique α tel que $f(\alpha) = 0$.

Exemple

Montrer que l'équation $x^3-2x-1-\sin(x)=0$ admet au moins une solution dans l'intervalle [0 ;π].

On n'a pas de méthode qui permet de résoudre algébriquement cette équation.

$f(x)=x^3-2x-1-\sin(x)$. f est la somme de deux fonctions continues $x \longmapsto x^3-2x-1$ et sin, donc f est continu(sur IR). f (0)= -1 <0 et f(π)= $\pi^3-2\pi-1 > 0$. Donc l'équation admet au moins une solution dans cette intervalle.

Théorème

Si f est continue et strictement monotone sur un intervalle I, alors f réalise une bijection de I sur J = f(I).

Donc si b est un élément de J, alors il existe un élément a unique de I, tel que f(a)= b.