Méthodes d'intégration

1. Primitivation par lecture directe du tableau des primitives

Exemple 1

Soit à calculer l'intégrale $I=\int_1^4 (3x^2+\frac{1}{\sqrt{x}})dx$

Soit $f(x)=3x^2+\frac{1}{\sqrt{x}}$

f est une fonction continue sur [1 ; 4], donc elle admet une primitive, ainsi l'intégrale I existe.

Par lecture du tableau des primitives usuelles, on trouve que la fonction F définie par $F(x)=3\frac{x^3}{3}+2\sqrt{x}$ est une primitive de f.

On a alors $I=[x^3+2\sqrt{x}]_1^4=4^3+2\sqrt{4}-1^3-2\sqrt{1}$

D'où I= 65

Exemple 2

Soit $I=\int_0^1 \frac{x+1}{(x^2+2x+3)^2}dx$

Posons $f(x)=\frac{x+1}{(x^2+2x+3)^2}$.

Si on pose $u(x)=x^2+2x+3$, on a u'(x)= 2x+2=2(x+1)

$$f(x)=\frac{2(x+1)}{2(x^2+2x+3)}=\frac{u'(x)}{2[u(x)]^2}$$

La fonction F définie par $F(x)=-\frac{1}{2}\frac{1}{u(x)}=-\frac{1}{2}\frac{1}{x^2+2x+3}$ est donc une primitive de f.

Alors $I=\left[-\frac{1}{2}\frac{1}{x^2+2x+3}\right]_0^1=-\frac{1}{2}\frac{1}{1^2+2.1+3}+\frac{1}{2}\frac{1}{0^2+2.0+3}$

Ce qui donne $I=\frac{1}{12}$

2. Intégration par transformation d'écriture

Exemple

$$I=\int_0^1 \frac{x^3+3x^2-1}{(x+2)^2}dx$$

Posons $f(x)=\frac{x^3+3x^2-1}{(x+2)^2}$

Déterminons les réels a, b et c tels que pour tout x différent de -1 ; on ait $f(x)=ax+b+\frac{c}{(x+2)^2}$

En réduisant au même dénominateur, on a $f(x)=\frac{ax^3+(4a+b)x^2+(4a+4b)x+4b+c}{(x+2)^2}$

En identifiant les coefficients des termes de même degré au numérateur, on trouve

a = 1, b = -1 et c= 3, ce qui donne $f(x)=x-1+\frac{3}{(x+2)^2}$

La fonction F définie par $F(x)=\frac{x^2}{2}-x-\frac{3}{x+2}$ est une primitive de f.

Donc $I=\int_0^1 \frac{x^3+3x^2-1}{(x+2)^2}dx=\left[\frac{x^2}{2}-x-\frac{3}{x+2}\right]_0^1$

$I=\left[\frac{1^2}{2}-1-\frac{3}{1+2}\right]-\left[\frac{0^2}{2}-0-\frac{3}{0+2}\right]$

Finalement I = 0

Un division euclidienne de x^3+3x^2-1 par $(x+2)^2=x^2+4x+4$ permet aussi de trouver cette forme de f(x)

3. Intégration par parties

On rappelle que si u et v sont des fonctions dérivables, alors (uv)'= u'v+v'u

Donc u'v= (uv)'-uv'

Alors $I=\int_a^b (u'v)(x)dx=\int_a^b (uv)'(x)dx-\int_a^b (v'u)(x)dx$

Comme uv est une primitive de (uv)', on a

$$I=[u(x).v(x)]_a^b-\int_a^b (v'u)(x)dx$$

Exemple

Soit $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}} x\cos(x)dx$

Posons u '(x) = cos x et v(x)= x

On a u(x)=sin x et v'(x)= 1

En appliquant la formule ci-dessus, on a

$$I=[u(x).v(x)]_0^{\frac{\pi}{4}}-\int_0^{\frac{\pi}{4}}(v'u)(x)dx=[x.\sin x]_0^{\frac{\pi}{4}}-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin(x)dx$$

Puisque la fonction F définie par F(x)= -cos x est une primitive de u = sin, on a

$$I=[x.\sin x]_0^{\frac{\pi}{4}}-[-\cos x]_0^{\frac{\pi}{4}}=\left(\left[\frac{\pi}{4}.\sin\frac{\pi}{4}\right]-\left[-\cos\frac{\pi}{4}\right]\right)-([0.\sin 0]-[-\cos 0])$$

Finalement $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}x\cos(x)dx=\frac{\pi\sqrt{2}}{8}+\frac{\sqrt{2}-2}{2}$

4. Intégration par changement de variable

Notation différentielle

Soit f une fonction dérivable. f'(x) se note aussi $\frac{df}{dx}$

Ainsi $f'(x)=\frac{df}{dx}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

on a alors $df=f'(x).dx$

df est appelé différentielle de f.

Les formules suivantes se déduisent immédiatement des formules de dérivation :

d(u+v) = du + dv

d(u.v) = v.du + u.dv

d(k .u) = k.du (pour tout réel k)

$d(u^n)=n.u^{n-1}.du$

$$d\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{v.du-udv}{v^2}$$

$$d\left(\frac{1}{u}\right)=-\frac{du}{u^2}$$

et $d(\sqrt{u})=\frac{du}{2\sqrt{u}}$

Principe de la méthode

Soit u la fonction définie par $u(x)=\lambda x+\mu$, a et b deux nombres réels tels que $a\leq b$, et f une fonction continue sur J=u([a ; b]) (image de l'intervalle [a ; b] par u)

Considérons l'intégrale $I=\int_a^b f(\lambda x+\mu)dx$

f étant continue sur J, elle y admet une primitive F.

Posons $g(x)=f(\lambda x+\mu)$

On a : $(Fou)'(x)=u'(x).F'(u(x))=\lambda.f(u(x))=\lambda.(fou)(x)$

Donc la fonction G définie par $G(x)=\frac{1}{\lambda}(Fou)(x)$ est une primitive de la fonction fou.

Et $I=\frac{1}{\lambda}[F(u(x)]_a^b=\frac{1}{\lambda}[F(u(b)-F(u(a))]$

Si on pose $\alpha = u(a) = \lambda a + \mu$ et $\mu = u(b) = \lambda b + \mu$, ona $I = \frac{1}{\lambda}\left[(F(u(x))\right]_{\alpha}^{\beta} = \frac{1}{\lambda}\left[(F(\beta) - F(\alpha)\right]$

Dans l'écriture $I = \int_a^b f(\lambda x + \mu)dx$, posons $u = \lambda x + \mu$, on a $du = \lambda dx$ et $dx = \frac{du}{\lambda}$

$f(\lambda x + \mu)dx = \frac{1}{\lambda}f(u)du$, u est la nouvelle variable d'intégration.

- Si x = a, $u = \lambda a + \mu = \alpha$

- Si x = b, $u = \lambda b + \mu = \beta$

Alors $I = \int_a^b f(\lambda x + \mu)dx = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{\lambda}f(u)du$

$I = \frac{1}{\lambda}\left[(F(\beta) - F(\alpha)\right]$

Exemples

1.- $I = \int_0^1 x\sqrt{2x+1}\,dx$

Posons u= 2x+1. On a du = 2dx, et $dx = \frac{1}{2}du$

- Si x = 0, alors u = 2.0 + 1=1

- si x = 1, alors u = 2.1 + 1= 3

Alors $I = \int_1^3 \frac{u-1}{2}\sqrt{u}\,.\frac{1}{2}.du = \frac{1}{4}\int_1^3 (u\sqrt{u} - \sqrt{u})du$

$g(u) = u\sqrt{u} - \sqrt{u} = u^{\frac{3}{2}} - u^{\frac{1}{2}}$

La fonction G définie par $G(u) = \frac{2}{5}u^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}$

Donc $I = \left[\frac{2}{5}(3^{\frac{5}{2}}) - \frac{2}{3}(3^{\frac{3}{2}})\right] - \left[\frac{2}{5}(1^{\frac{5}{2}}) - \frac{2}{3}(1^{\frac{3}{2}})\right]$

$I = \left[\frac{2}{5}(3^2\sqrt{3}) - \frac{2}{3}(3\sqrt{3})\right] - \left[\frac{2}{5} - \frac{2}{3}\right]$

$I = \left[\frac{18\sqrt{3}}{5} - \frac{6\sqrt{3}}{3}\right] - \left[\frac{2}{5} - \frac{2}{3}\right]$

Finalement $I = \frac{2\sqrt{3}}{5} + \frac{1}{15}$

2.- Montrer que quel que soit les entiers naturels m et n non nuls, $\int_0^1 (1-x)^m.x^n dx = \int_0^1 x^m (1-x)^n dx$

Soit $I = \int_0^1 (1-x)^m.x^n dx$

Posons u = 1-x. On a x = 1-u et dx = -du

Lorsque x = 0 alors u = -1 et lorsque x =1, alors u = 0.

$I = \int_0^1 (1-x)^m.x^n dx = \int_1^0 u^m.(1-u)^n(-du) = -\int_1^0 u^m.(1-u)^n du$

Finalement, $I = \int_0^1 u^m(1-u)^n du = \int_0^1 x^m(1-x)^n dx$