Bac 2007 - Mécanique
Correction avec rappel de l'énoncé

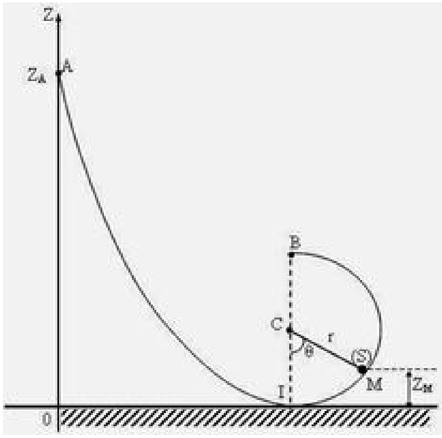
A - Un solide ponctuel (S), de masse m peut glisser sans frottement sur une piste AIB, contenue dans un plan vertical, et dont les caractéristiques sont les suivantes:

- la partie AI est curviligne.

- la partie IB est un demi-cercle de centre C et de rayon r (figure 2).

L'horizontal passant par O et I est pris comme origine des altitudes ($Z_O = Z_I = 0$).

Le solide (S) est abandonné, sans vitesse initiale, au point A d'altitude Z_A. M étant un point quelconque de la trajectoire circulaire, d'altitude Z_M, on appelle θ l'angle ($\vec{CI}, \vec{CM}$). (1,00)



A-1 Exprimer la vitesse linéaire du solide (S) à son passage en M, en fonction de g, Z_A et Z_M.

L'énergie mécanique du solide se conserve le long du parcours, soit:

$$E_P(A) + E_C(A) = E_P(M) + E_C(M)$$

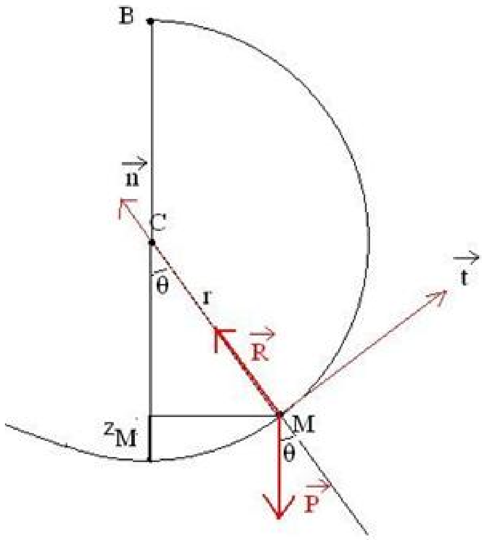
$$\boxed{m.g.Z_A = m.g.Z_M + \frac{1}{2}.m.v_M^2 \Rightarrow v_M = \sqrt{2.g.(Z_A - Z_M)}}$$

2 -Montrer que lorsque (S) passe par M, l'intensité R de la réaction exercée par la piste sur (S) peut s'écrire:

$$R = mg(1 + \frac{2Z_A}{r} - \frac{3Z_M}{r})$$

Le référentiel d'étude du mouvement est la Terre que l'on considère galiléen. Par conséquent la relation du centre d'inertie peut s'appliquer au solide S(m).

Les forces appliquées à S sont: le poids **P** et la réaction de la piste **R** sur le mobile normale à la trajectoire car les frottements sont négligés.



$$\vec{P} + \vec{R} = m.\vec{a}$$

Projetons cette relation sur la normale en M orientée positivement vers C; nous obtenons la relation algébrique:

$$R - mg.\cos\theta = m.\frac{v(M)^2}{r}$$

Dans cette expression «R» désigne l'intensité de la force de réaction (R>0)

En remplaçant v(M) par l'expression trouvée au paragraphe précédent,

$$R = mg\cos\theta + \frac{m}{r} * 2g(Z_A - Z_M) = mg(\cos\theta + 2.\frac{Z_A}{r} - 2.\frac{Z_M}{r})$$

Et comme: Z_M=r(1-cosq) (voir fig précédente), on tire cosq=1-Z_M/R que l'on remplace dans l'expression de R qui devient:

$$\boxed{R = mg(1 + 2.\frac{Z_A}{r} - 3.\frac{Z_M}{r})}$$

3 - Déduire de ce qui précède la valeur minimale du rapport $\frac{Z_A}{r}$ pour que le solide (S) puisse atteindre le point B.

Elle correspond au cas où le mobile S arrive au point B avec une vitesse nulle.

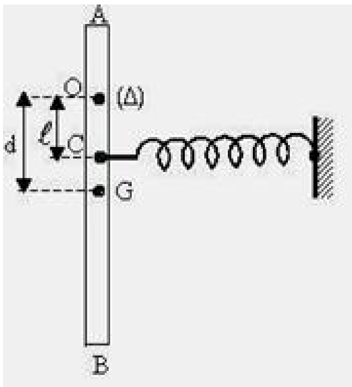
Dans ce cas, le mobile S tombe, la réaction R devient nulle et Z_M=2r.

$$\boxed{1+2.\frac{Z_A}{r}-\frac{3.2r}{r}=0 \Rightarrow \frac{Z_A}{r}=2,5}$$

B - Un pendule pesant est constitué d'une tige rectiligne homogène AB de masse M = 0,2 kg. Ce pendule peut osciller sans frottement dans un plan vertical autour d'un axe fixe(Δ) horizontal passant par le point O de la tige. Ce point O est situé à la distance OG = d du centre d'inertie G de la tige.

On fixe en un point C situé à la distance OC = ℓ de O, l'une des extrémités d'un ressort horizontal à spires non jointives, de masse négligeable et de constante de raideur K; l'autre extrémité est fixée au point I (figure 3). Initialement, la tige est immobile et verticale, et le ressort détendu.

On écarte la tige AB de sa position d'équilibre d'un angle θ_m très petit et on l'abandonne sans vitesse initiale à l'instant t = 0. Soient θ l'élongation angulaire du mouvement de la tige AB mesurée à partir de sa position d'équilibre, $\dot{\theta}$ sa vitesse angulaire, x le raccourcissement du ressort tel que x = ℓsin θ et J_Δ le moment d'inertie de la tige AB par rapport à l'axe (Δ).



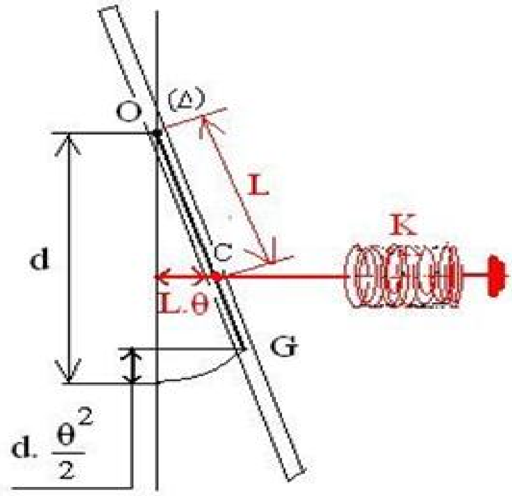
B- 1 -En prenant comme référence de l'énergie potentielle élastique et de l'énergie potentielle de pesanteur, la position d'équilibre, exprimer l'énergie mécanique du système {ressort + tige + Terre} en fonction de K, ℓ, M, d, g, J_Δ, θ et $\dot{\theta}$.

Considérons le pendule écarté <u>légèrement</u> de sa position d'équilibre (voir fig ci-dessous).

Le petit déplacement horizontal du point C est: L.sinq = L.q

Le petit déplacement vertical du point G est:

d-d.cosq =d(1-cosq)=d(1-1+q^2/2)=d.q^2/2



petits déplacements

L'énergie mécanique est la somme:

Em= E_P(pesanteur)+ E_P (élastique) + Ec

$$Em = Mg(d.\frac{\theta^2}{2}) + \frac{1}{2}.K.(L^2.\theta^2) + \frac{1}{2}.J_\Delta.\dot{\theta}^2 = \left[Mgd + K.L^2\right]\frac{\theta^2}{2} + \frac{1}{2}J_\Delta.\dot{\theta}^2$$

2- Sachant que le système est conservatif, établir l'équation différentielle du mouvement de la tige AB autour de l'axe (Δ).

$$\forall t \Rightarrow \frac{dEm}{dt} = 0$$

$$\left[Mgd + K.L^2\right]\frac{2.\theta.\dot{\theta}}{2} + \frac{1}{2}J_\Delta.2.\dot{\theta}\ddot{\theta} = 0 \text{, équation valable } \forall t$$

$$\text{en simplifiant par } \dot{\theta} \text{, on obtient : } \left[Mgd + K.L^2\right]\theta + J_\Delta.\ddot{\theta} = 0$$

et, en divisant Par J_D

$$\boxed{\ddot{\theta} + \left[\frac{Mgd + K.L^2}{J_\Delta}\right].\theta = 0}$$

équation d'un oscillateur harmonique de pulsation:

$$\omega = \sqrt{\frac{Mgd + KL^2}{J_\Delta}}$$

3 - Exprimer la période T en fonction de K, ℓ, M, g, d, et J_Δ.

$$\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{J_\Delta}{Mgd + KL^2}}}$$

4 - Si on supprime le ressort, la période de la tige AB devient

$$T' = 2\pi\sqrt{\frac{J_\Delta}{Mgd}}$$

telle que T' = 2T.

Calculer la distance d sachant que l = 20 cm et K = 50 N.m^{-1}.

On donne: (0,50)

Ecrivons que T'=2T

$$2\pi\sqrt{\frac{J_\Delta}{Mgd}} = 4\pi\sqrt{\frac{J_\Delta}{Mgd + KL^2}}$$

$$\boxed{soit:\ Mgd = \frac{Mgd + KL^2}{4} \Rightarrow et\ donc: d = \frac{KL^2}{3Mg} = \frac{50.0{,}2^2}{3.0{,}2.10} = 0{,}33m}$$