PROBLEME DE MECANIQUE (bac 2007 6 points)

Les parties A et B sont indépendantes. Prendre: $g = 10\ m.s^{-2}$.

A - Un solide ponctuel (S), de masse m peut glisser sans frottement sur une piste AIB, contenue dans un plan vertical, et dont les caractéristiques sont les suivantes:

- la partie AI est curviligne.

- la partie IB est un demi-cercle de centre C et de rayon r (figure 2).

L'horizontal passant par O et I est pris comme origine des altitudes ($Z_O = Z_I = 0$).

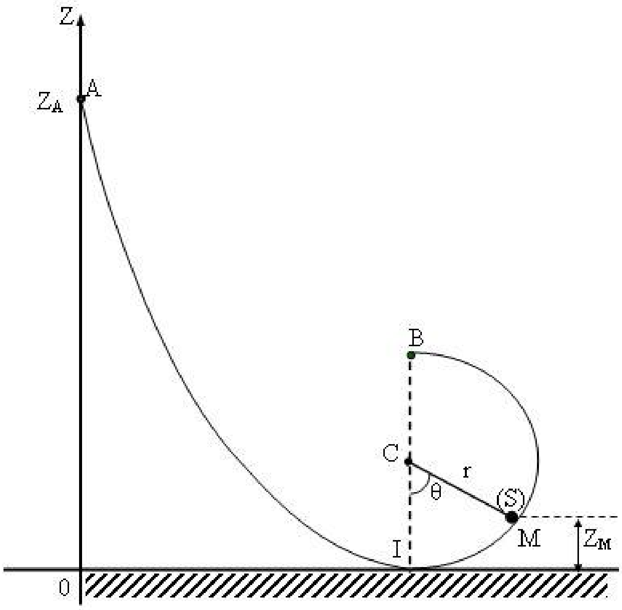
Le solide (S) est abandonné, sans vitesse initiale, au point A d'altitude Z_A. M étant un point quelconque de la trajectoire circulaire, d'altitude Z_M, on appelle θ l'angle $(\vec{CI}, \vec{CM})$.

1 - Exprimer la vitesse linéaire du solide (S) à son passage en M, en fonction de g, Z_A et Z_M. (1,00)

2 -Montrer que lorsque (S) passe par M, l'intensité R de la réaction exercée par la piste sur (S) peut s'écrire:

$$R = mg(1 + \frac{2Z_A}{r} - \frac{3Z_M}{r}) \quad (1,00)$$

3 - Déduire de ce qui précède la valeur minimale du rapport $\frac{Z_A}{r}$ pour que le solide (S) puisse atteindre le point **B.** (1,00)



(Fig.2)

B - Un pendule pesant est constitué d'une tige rectiligne homogène AB de masse $M = 0,2$ kg. Ce pendule peut osciller sans frottement dans un plan vertical autour d'un axe fixe(Δ) horizontal passant par le point O de la tige. Ce point O est situé à la distance $OG = d$ du centre d'inertie G de la tige.
On fixe en un point C situé à la distance $OC = l$ de O, l'une des extrémités d'un ressort horizontal à spires non jointives, de masse négligeable et de constante de raideur K; l'autre extrémité est fixée au point I (figure 3). Initialement, la tige est immobile et verticale, et le ressort détendu.
On écarte la tige AB de sa position d'équilibre d'un angle θ_m très petit et on l'abandonne sans vitesse initiale à l'instant $t = 0$. Soient θ l'élongation angulaire du mouvement de la tige AB mesurée à partir de sa position d'équilibre, $\dot{\theta}$ sa vitesse angulaire, x le raccourcissement du ressort tel que $x = l\sin\theta$ et J_Δ le moment d'inertie de la tige AB par rapport à l'axe (Δ).

1 - En prenant comme référence de l'énergie potentielle élastique et de l'énergie potentielle de pesanteur, la position d'équilibre, exprimer l'énergie mécanique du système {ressort + tige + Terre} en fonction de K, l, M, d, g, J_Δ, θ et $\dot{\theta}$. (1,00)

2 - Sachant que le système est conservatif, établir l'équation différentielle du mouvement de la tige AB autour de l'axe (Δ). (1,00)

3 - Exprimer la période T en fonction de K, l, M, g, d, et J_Δ. (0,50)

4 - Si on supprime le ressort, la période de la tige AB devient

$$T' = 2\pi\sqrt{\frac{J_\Delta}{Mgd}}$$

telle que $T' = 2T$.

Calculer la distance d sachant que $l = 20$ cm et $K = 50\ N.m^{-1}$.
On donne:

$$\cos\theta \approx 1 - \frac{\theta^2}{2}$$

$\sin\theta \simeq \theta$ si l'angle θ est petit.

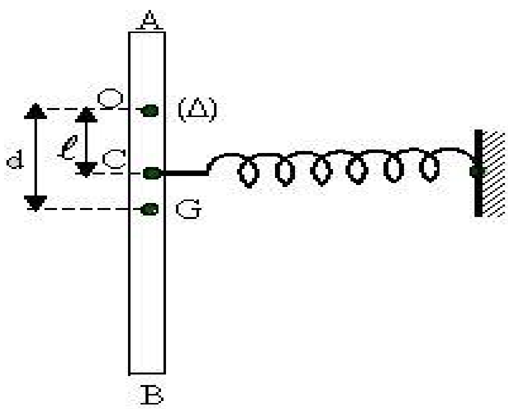


Fig 3 (0,50)