Série 1 : Exercices sur les relations métriques dans un triangle

Exercice 1 :

ABC est un triangle quelconque.

1) Déterminer BC, $\hat{B}$ et $\hat{C}$ sachant que :

a) $AC=3, \ AB=4$ et $\hat{A}=60°$ b) $AC=2, \ AB=3\sqrt{3}$ et $\hat{A}=45°$

2) Déterminer les angles $\hat{A}$, $\hat{B}$ et $\hat{C}$ lorsque :

a) $AC=4, \ AB=13$ et $BC=15$ b) $AC=7, \ AB=8$ et $BC=8$

Exercice 2 :

(D) et (D') sont deux droites de même origine O et perpendiculaire en O. A et B sont deux points distincts de (D) et distincts de O. Le point A appartient au segment [OB] ; C et D sont deux points de (D') tels que OC = OA et OD = OB. I est le milieu de [AD].

1. Tracer une figure.
2. Démontrer que (BC) et (OI) sont perpendiculaires.

Exercice 3 :

ABCD est un rectangle avec AB = a , AD = b et a > b.

1) Montrer que $\overrightarrow{DB}.\overrightarrow{AC}=a^2-b^2$.

2) H est le projeté orthogonal de B sur (AC) et K le projeté orthogonal de D sur (AC).

a) Justifier l'égalité $\overrightarrow{HK}.\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{DB}.\overrightarrow{AC}=a^2-b^2$

b) En déduire la distance KH.

Exercice 4 :

(D) et (D') sont deux droites d'équations respectives y = x - 1 et y = - 2x + 3 dans un repère orthonormal.
On se propose de trouver l'angle aigu, noté α, formé par ces deux droites.

1) Tracer les droites (D) et (D').

2) Trouver un vecteur directeur $\vec{u}$ de (D) et un vecteur directeur $\vec{u}\,'$ de (D').

3) Calculer cos α puis α.

Exercice 5 :

ABC est un triangle avec a = BC, b = CA et c = AB.
I est le milieu de [BC], J celui de [AC] et K celui de [AB].

1) En utilisant le théorème de la médiane, montrer que $IA^2+JB^2+KC^2=\frac{3}{4}(a^2+b^2+c^2)$.

2) On suppose ABC rectangle en A. Montrer que $5AI^2=BJ^2+CK^2$.

Exercice 6 :

ABC est un triangle. On pose AB = c , AC = b , BC = a et 2p = a + b + c.

1) Prouver que $(4b^2c^2)\sin^2\hat{A}=(a+b+c)(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)$.

2) Prouver que $\sin^2\hat{A}=\frac{4}{b^2c^2}p(p-b)(p-a)(p-c)$.

3) Prouver que l'aire du triangle ABC est : $S=\sqrt{p(p-b)(p-a)(p-c)}$.