Séquence 1 : Relation métrique dans un triangle

1. Théorème de Pythagore

Soit ABC un triangle.

En calculant $\vec{BC}.\vec{BC}$ avec $\vec{BC}=\vec{AC}-\vec{AB}$, on obtient :

$$\vec{BC}^2=\vec{AC}^2+\vec{AB}^2-2\vec{AC}.\vec{AB} \quad (1)$$

C'est la relation de Pythagore généralisée. Elle permet de retrouver le théorème de Pythagore et sa réciproque.

En effet, le triangle ABC est rectangle en A signifie $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ sont orthogonaux.

Donc le triangle ABC est rectangle en A si et seulement si $\vec{AB}.\vec{AC}=0$.

Par suite, BC² = AC²+AB² .

2. Mesures des angles dans un triangle

En exprimant $\vec{AB}.\vec{AC}$ sous la forme $\|\vec{AB}\|\times\|\vec{AC}\|\times\cos\left(\widehat{\vec{AB},\vec{AC}}\right)$, la relation (1) s'écrit :

$$BC^2=AC^2+AB^2-2AC.AB.\cos\hat{A}$$

Par symétrie d'écriture, on obtient : $AC^2=BC^2+BA^2-2BC.BA.\cos\hat{B}$

$$AB^2=CB^2+CA^2-2CB.CA.\cos\hat{C} \ .$$

3. Relation métrique dans un triangle rectangle

Soit ABC un triangle et H le pied de la hauteur issue de A.

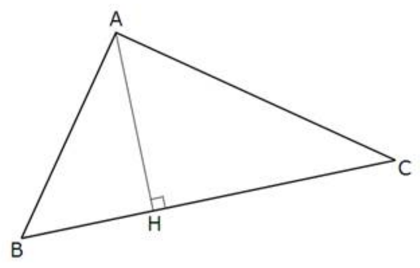
ABC est rectangle en A si et seulement si $AB^2=\vec{BH}.\vec{BC}$.

En effet, dans un triangle ABC, on a $\vec{BA}.\vec{BC}=\vec{BH}.\vec{BC}$ (1)

Le triangle est rectangle en A si et seulement si le point C se projette orthogonalement en A, ce que l'on peut traduire par

$\vec{BA}.\vec{BC}=\vec{BA}.\vec{BA}=\vec{BA}^2$ (2)

Des relations (1) et (2), on déduit $AB^2=\vec{BH}.\vec{BC}$.



Soit ABC un triangle et H le pied de la hauteur issue de A.

ABC est rectangle en A si et seulement si $AB^2 = -\overrightarrow{HB}.\overrightarrow{HC}$.

En effet, quel que soit le triangle ABC, le triangle ABH est rectangle en H.

Ainsi, ABC est rectangle en A si et seulement si $\overrightarrow{AB}^2 = \overrightarrow{BH}.\overrightarrow{BC}$, donc si et seulement si

$AH^2 + HB^2 = \overrightarrow{BH}.(\overrightarrow{BH} + \overrightarrow{HC}) = \overrightarrow{BH}^2 + \overrightarrow{BH}.\overrightarrow{BC}$.

D'où $\overrightarrow{AH}^2 = \overrightarrow{BH}.\overrightarrow{HC} = -\overrightarrow{HB}.\overrightarrow{HC}$.

4. Applications du produit scalaire

4.1 Vecteur normal à une droite

Étant donné une droite (D), tout vecteur non nul orthogonal à un vecteur directeur de (D) est appelé **vecteur normal** à (D).

Soit (D) : ax + by + c = 0 , elle admet comme vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$.

Soit $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$, alors $\vec{n}.\vec{u} = a(-b) + ba = 0$. Donc $\vec{n}$ est orthogonal à (D).

Ainsi, toute droite dont une équation est de la forme ax + by + c = 0 admet $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ comme vecteur normal.

4.2 Équation d'une droite

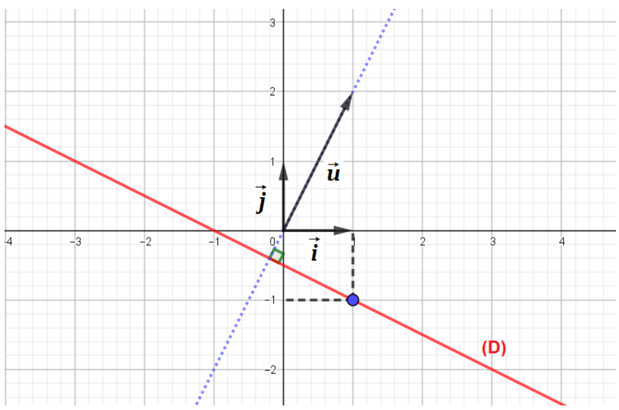
Soit $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ un vecteur non nul et A un point du plan.

Un point M(x , y) appartient à la droite (D) orthogonale à $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ et passant par A si $\overrightarrow{AM}.\vec{n} = 0$.

Ce qui donne une relation de la forme ax + by + c = 0.

Exemple :

On se donne le point A(1, -1) et le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ et on va déterminer une équation de la droite (D) passant par A et normale à $\vec{n}$.



Un point M appartient à la droite (D) passant par A et normale à $\vec{n}$ si et seulement si $\overrightarrow{AM}.\vec{n}=0$.

Soit M(x ; y). On a : $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x-1 \\ y+1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AM}.\vec{n}=(x-1)\times 1+(y+1)\times 2$ donc $\overrightarrow{AM}.\vec{n}=0$ si et seulement si $x + 2y + 1 = 0$.

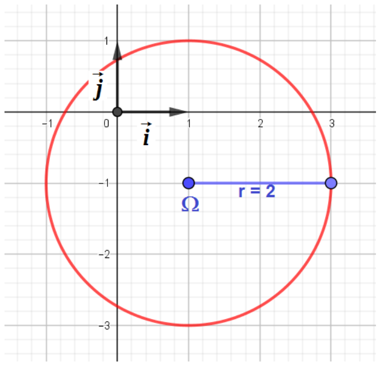
L'équation de (D) est donc $x + 2y + 1 = 0$

4.3 Équation d'un cercle

Cercle de centre et de rayon donnés

Le cercle de centre Ω et de rayon r est l'ensemble des points M tels que ΩM = r.

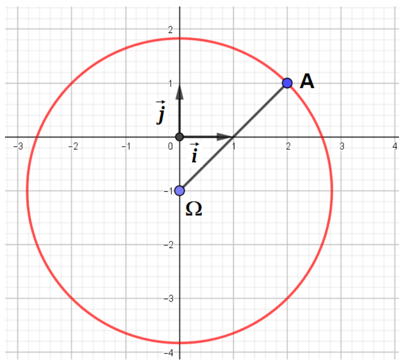
Exemple : Donner l'équation du cercle C de centre Ω(1 ; -1) et de rayon 2.



C est l'ensemble des points M(x ; y) tels que $\Omega M^2 = 2^2$.
$\Omega M^2 = (x-1)^2 + (y+1)^2$
$\Omega M^2 = 4$ si et seulement si $(x-1)^2 + (y+1)^2 = 4$.
Donc l'équation du cercle est $x^2 + y^2 - 2x + 2y - 2 = 0$.

Cercle passant par un point et de centre donné

Exemple : Déterminer l'équation du cercle de centre Ω (0,-1) et passant par le point A (2,1).



Ce cercle de centre Ω a pour rayon ΩA= || $\overrightarrow{\Omega A}$ ||.

ΩA = $\sqrt{((2+0)^2+(1+1)^2)}=2\sqrt{2}$.

C est l'ensemble des points M(x ; y) tels que $AM^2 = 8$.

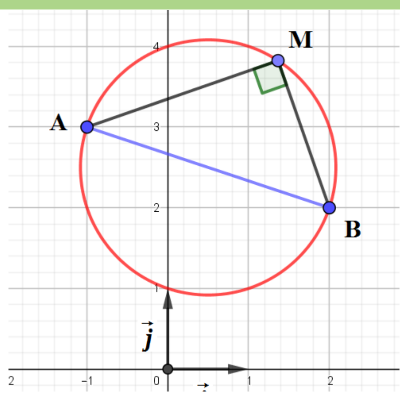
$\Omega M^2 = 8$ si et seulement si $(x)^2 + (y+1)^2 = 8$.

Donc l'équation du cercle est $x^2 + y^2 + 2y - 8 = 0$.

Cercle de diamètre donné

A et B étant deux points donnés, le cercle (C) de diamètre [AB] est l'ensemble des points M tels que :
$\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM}=0$

Exemple : On donne A(-1 ; 3) et B(2 ; 2).



Déterminer l'équation du cercle (C) de diamètre [AB].

Si $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM}=0$, alors $(x+1)(x+2)+(y-3)(y-2) = 0$.

Donc l'équation de (C) est $x^2 + y^2 - x - 5y + 4 = 0$.