Séquence 1 : Les vecteurs du plan

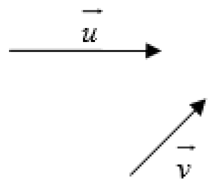
1. Combinaison linéaire

1.1 Définition

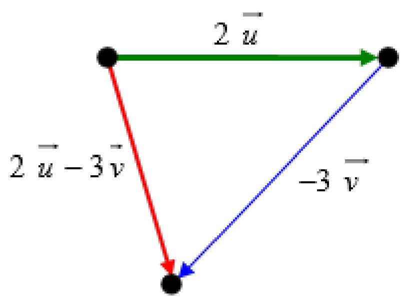
Le vecteur $\vec{w}$ est **une combinaison linéaire** des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ s'il existe deux nombres réels a et b vérifiant : $\vec{w}=a\vec{u}+b\vec{v}$.

1.2 Exemples

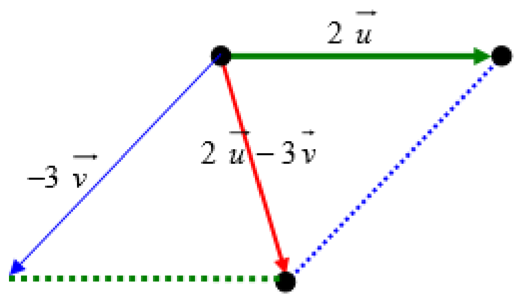
- $\vec{w}=\vec{i}-5\vec{j}$; $\vec{k}=2\vec{i}+3\vec{j}$ sont des combinaisons linéaires de $\vec{i}$ et $\vec{j}$.
- On donne deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$. Construire le vecteur $2\vec{u}-3\vec{v}$.



Règle de la relation de Chasles :



Règle du parallélogramme :



- Dans un parallélogramme ABCD, on a : $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$ donc le vecteur $\overrightarrow{AC}$ est une combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$.

- Le vecteur $2\vec{u}$ est une combinaison de $\vec{u}$.
- Le vecteur $4\vec{u}-2\vec{v}$ est une combinaison linéaire des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
- Le vecteur nul, noté $\vec{0}$, est une combinaison linéaire de tout vecteur.

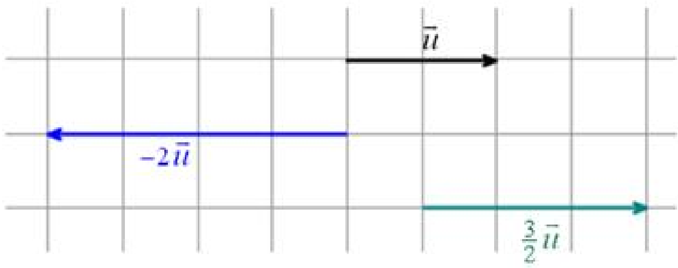
1.3 Vecteur colinéaires

Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **colinéaires** s'ils ont même direction. On le symbolise par : $\vec{u}\,//\,\vec{v}$.

- $\vec{u}\,//\,\vec{v}$ signifie qu'il existe un réel k vérifiant : $\vec{v}=k\,\vec{u}$;
- Si k > 0, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont même sens ;
- Si k < 0, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont de sens contraires.

Exemples :

- Soit A, B et C trois points alignés. B est milieu du segment [AC] signifie $\overrightarrow{AC}=2\,\overrightarrow{AB}$.
  Alors $\overrightarrow{AC}\,//\,\overrightarrow{AB}$.
- Illustrations de vecteurs colinéaires de même sens ou de sens contraires :



2. Base du plan

2.1 Définition

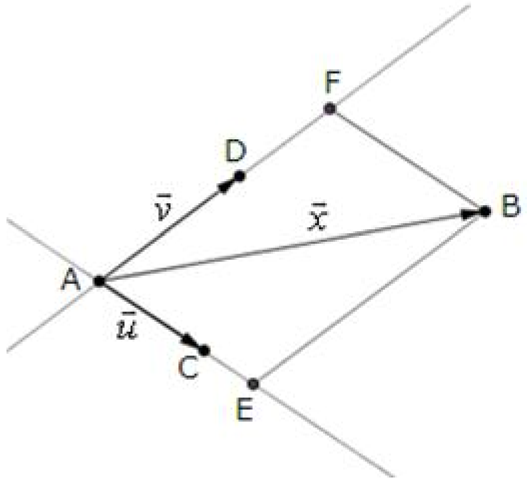
Tout couple de vecteurs non colinéaires $(\vec{u}\,;\vec{v})$ constitue une **base du plan vectoriel**.
Une **base** est un couple de vecteurs non colinéaires qui permet d'exprimer n'importe quel autre vecteur à l'aide d'une combinaison linéaire.

Si $(\vec{u}\,;\vec{v})$ est une base, tout vecteur $\vec{x}$ du plan s'écrit de façon unique comme combinaison linéaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

En effet :

- Si $\vec{x}$ est nul, alors $\vec{x}=0\,\vec{u}+0\,\vec{v}$
- Si $\vec{x}$ est colinéaire à $\vec{u}$, alors il existe un nombre réel k tel que . $\vec{x}=k\,\vec{u}+0\,\vec{v}$
- Si $\vec{x}$ est colinéaire à $\vec{v}$, alors il existe un réel h tel que $\vec{x}=0\,\vec{u}+h\,\vec{v}$
- Si $\vec{x}$ n'est ni colinéaire à $\vec{u}$ ni colinéaire à $\vec{v}$:

  Soient A, B, C et D des points du plan tels que $\vec{AB}=\vec{x}$, $\vec{AC}=\vec{u}$, $\vec{AD}=\vec{v}$.
- Soient $E\in(AC)$ et $F\in(AD)$ tels que AEBF soit un parallélogramme. On a : $\vec{AB}=\vec{AE}+\vec{AF}$.
- Or $\vec{AE}$ est colinéaire à $\vec{AC}$ et $\vec{AF}$ est colinéaire à $\vec{AD}$. Donc il existe deux nombres réels a et b tels que : $\vec{AE}=a\,\vec{AC}$ et $\vec{AF}=b\,\vec{AD}$.
- Par suite, $\vec{AB}=a\,\vec{AC}+b\,\vec{AD}$. Ainsi : $\vec{x}=a\,\vec{u}+b\,\vec{v}$.



2.2 Composantes ou coordonnées d'un vecteur

2.2.1 Composantes d'un vecteur

Soit $(\vec{u}\,;\vec{v})$ une base du plan et $\vec{w}=a\,\vec{u}+b\,\vec{v}$.

Les réels a et b sont les **composantes** de $\vec{w}$ dans cette base ; on note $\vec{w}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$.

2.2.2 Déterminant de deux vecteurs

a) Définition

Soient deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de coordonnées $\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}a'\\b'\end{pmatrix}$ dans une base $(\vec{i}\,;\vec{j})$.

Le **déterminant** de $\vec{u}$ et $\vec{v}$,noté $\text{dét}(\vec{u}\,;\vec{v})$, dans la base $(\vec{i}\,;\vec{j})$ est :

$$\text{dét}(\vec{u}\,;\vec{v})=\begin{vmatrix}a & a'\\ b & b'\end{vmatrix}=a\,b'-a'\,b \quad .$$

b) Propriétés

- $\text{dét}(\vec{u}\,;\vec{u})=0$

En effet, $\text{dét}(\vec{u}\,;\vec{u})=\text{a b}-\text{a b}=0$

- $\text{dét}(\vec{u}\,;\vec{v})=-\text{dét}(\vec{v}\,;\vec{u})$.

Il suffit d'appliquer la définition et de comparer.

- $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si $\text{dét}(\vec{u}\,;\vec{v})=0$.

- $(\vec{u}\,;\vec{v})$ est une base si et seulement si $\text{dét}(\vec{u}\,;\vec{v})\neq 0$.

c) Exemples

- Dans la base $(\vec{i}\,,\vec{j})$, $\vec{i}=1\,\vec{i}+0\,\vec{j}$ et $\vec{j}=0\,\vec{i}+1\,\vec{j}$. Les composantes des vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ dans cette base sont respectivement $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$. $\text{dét}(\vec{i}\,;\vec{j})=1$.

- Dans la base $(\vec{i}\,,\vec{j})$, on donne $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$. Montrer que $(\vec{u}\,;\vec{v})$ est une base.

On a : $\text{dét}(\vec{u}\,;\vec{v})=\begin{vmatrix}1 & -1\\1 & 1\end{vmatrix}=1\,x\,1-(-1)\,x\,1=2$. $\text{dét}(\vec{u}\,;\vec{v})\neq 0$ donc $(\vec{u}\,;\vec{v})$ est une base.

- Soit $\vec{w}=\vec{i}+2\,\vec{j}$. Écrire le vecteur $\vec{w}$ comme combinaison linéaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Méthode pour trouver les composantes d'un vecteur dans une base :

- Écrire l'équation vectorielle ;
- Convertir cette équation en système numérique ;
- Résoudre ce système qui a une solution unique.

Posons $\vec{w}=\text{x}\,\vec{u}+\text{y}\,\vec{v}$. Alors $\vec{i}+2\,\vec{j}=\text{x}(\vec{i}+\vec{j})+\text{y}(-\vec{i}+\vec{j})$ ou encore $\vec{i}+2\,\vec{j}=(\text{x-y})\,\vec{i}+(\text{x+y})\,\vec{j}$.

On doit résoudre le système : $\begin{cases}x-y=1\\x+y=2\end{cases}$. Après calcul, on trouve $x=1{,}5$ et $y=0{,}5$.