Séquence 1: Thalès, propriétés directe et réciproque

1. Théorème de Thalès

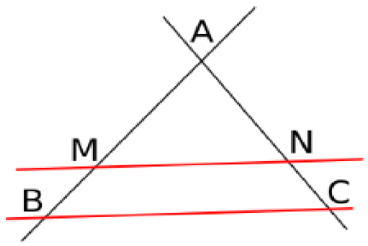
1.1 Théorème

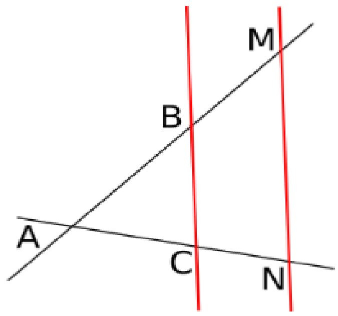
Soient (AB) et (AC) deux droites sécantes en A, M un point de (AB) et N un point de (AC).

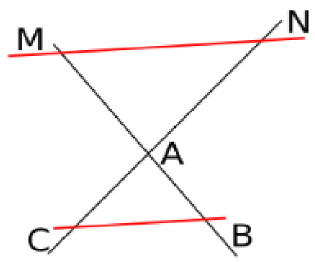
Si les droites (AB) et (MN) sont parallèles, alors : $\frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}=\frac{MN}{BC}$.

1.2 Configuration de Thalès

Les trois figures suivantes représentent des situations de Thalès où les droites (BC) et (MN) sont parallèles.

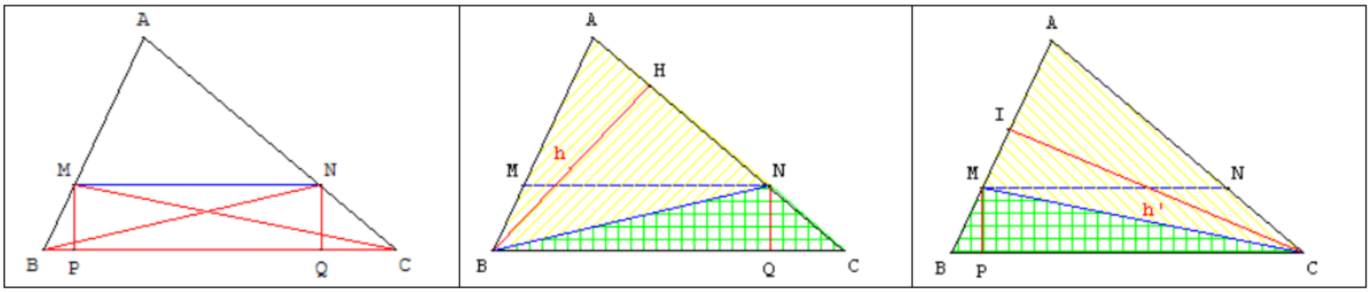






1.3 Démonstration d'Euclide par la méthode des aires

Thalès a découvert le théorème, mais c'est Euclide qui l'a prouvé.



Les triangles MBC et NBC ont le côté [BC] commun ; les troisièmes sommets sont sur une parallèle à ce côté donc ils ont des hauteurs MP et MQ égales.

Ces deux triangles ont même aires et par complément, dans le triangle ABC, on a les égalités des aires A(AMC) = A(ABN).

En divisant les deux termes de cette égalité par A(ABC) on a : $\frac{A(\mathrm{AMC})}{A(\mathrm{ABC})}=\frac{A(\mathrm{ABN})}{A(\mathrm{ABC})}$.

Soit h' = CI, la hauteur en C des triangles AMC et ABC.

On a alors : $A(\mathrm{AMC})=\mathrm{AM}\, x\, \frac{\mathrm{h'}}{2}$ et $A(\mathrm{ABC})=\mathrm{AB}\, x\, \frac{\mathrm{h'}}{2}$.

Soit h = BH la hauteur en B des triangles ABN et ABC.

On a alors : $A(\mathrm{ABN})=\mathrm{AN}\, x\, \frac{\mathrm{h}}{2}$ et $A(\mathrm{ABC})=\mathrm{AC}\, x\, \frac{\mathrm{h}}{2}$.

Les rapports des aires sont : $\frac{A(\mathrm{AMC})}{A(\mathrm{ABC})}=\frac{\mathrm{AM}\, x\, \frac{\mathrm{h'}}{2}}{\mathrm{AB}\, x\, \frac{\mathrm{h'}}{2}}=\frac{\mathrm{AM}}{\mathrm{AB}}$ et $\frac{A(\mathrm{ABN})}{A(\mathrm{ABC})}=\frac{\mathrm{AN}\, x\, \frac{\mathrm{h}}{2}}{\mathrm{AB}\, x\, \frac{\mathrm{h}}{2}}=\frac{\mathrm{AN}}{\mathrm{AC}}$.

En conclusion, $\frac{\mathrm{AM}}{\mathrm{AB}}=\frac{\mathrm{AN}}{\mathrm{AC}}$.

Calcul de : $\frac{\mathrm{MN}}{\mathrm{BC}}$.

Soit [AH] la hauteur en A de ABC qui coupe (MN) en I.

Dans les triangles rectangles ABH et AHC, la propriété de Thalès permet d'écrire :

$$\frac{\mathrm{AM}}{\mathrm{AB}}=\frac{\mathrm{AI}}{\mathrm{AH}}=\frac{\mathrm{AN}}{\mathrm{AC}}$$

Les triangles IHN et ICN ont même aire car le côté [IN] est commun et les troisièmes sommets sont sur une parallèle à ce côté commun.

En ajoutant l'aire du triangle AIN, on a :

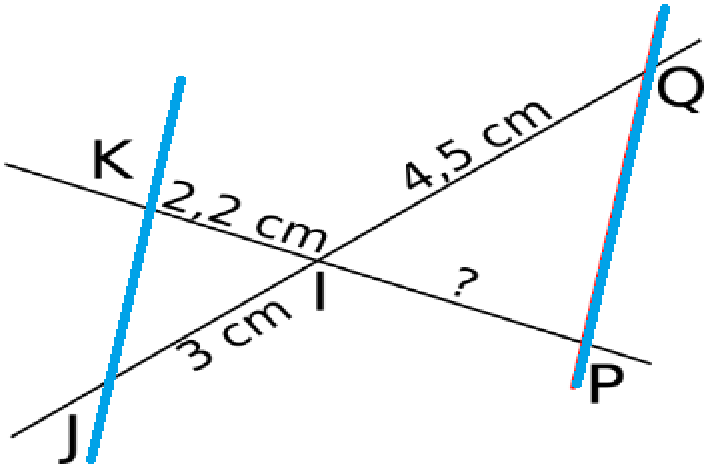
A(AHN) = A(AIC). Or, A(AHN) = $\frac{1}{2}\mathrm{AH}\, x\, \mathrm{IN}$ et A(AIC) = $\frac{1}{2}\mathrm{AI}\, x\, \mathrm{HC}$.

Donc $\mathrm{AH}\, x\, \mathrm{IN}=\mathrm{AI}\, x\, \mathrm{HC}$. Alors $\frac{\mathrm{AI}}{\mathrm{AH}}=\frac{\mathrm{IN}}{\mathrm{HC}}$. On démontre de même que $\frac{\mathrm{AI}}{\mathrm{AH}}=\frac{\mathrm{MI}}{\mathrm{BH}}$.

Or $\frac{\mathrm{AI}}{\mathrm{AH}}=\frac{\mathrm{AM}}{\mathrm{AB}}=\frac{\mathrm{MI}+\mathrm{IN}}{\mathrm{BH}+\mathrm{HC}}=\frac{\mathrm{MN}}{\mathrm{BC}}$.

Exemple :

- Calculer la longueur du segment [IP] sachant que KI = 22,2 cm ; JI = 3 cm ; IQ = 4,5 cm et que les droites (JK) et (PQ) sont parallèles.

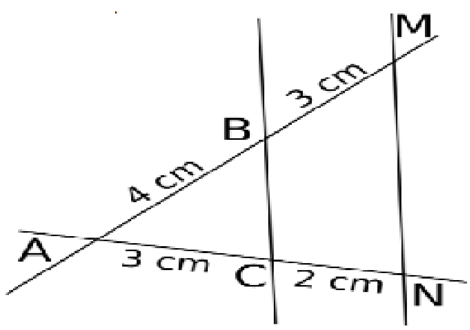


Les droites (KP) et (JQ) sont sécantes en I et les droites (JK) et (PQ) sont parallèles.

D'après le théorème de Thalès, $\frac{IK}{IP}=\frac{IJ}{IQ}=\frac{KJ}{PQ}$ donc $\frac{2,2}{IP}=\frac{3}{4,5}$.

On trouve IP = 3,3 cm.

- Dans la figure suivante, montrer que les droites (BC) et (MN) ne sont pas parallèles.



Les droites (BM) et (CN) sont sécantes en A.

D'une part, $\frac{AC}{AN}=\frac{3}{5}=0,6$; d'autre part $\frac{AB}{AM}=\frac{4}{7}=0,57$.

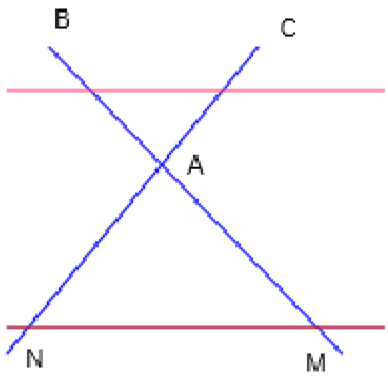
$\frac{AC}{AN}$ et $\frac{AB}{AM}$ sont différents donc les droites (BM) et (CN) ne sont pas parallèles.

2. Réciproque du théorème de Thalès

2.1 Théorème

Soient (AB) et (AC) deux droites sécantes en A, M un point de (AB) et N un point de (AC).

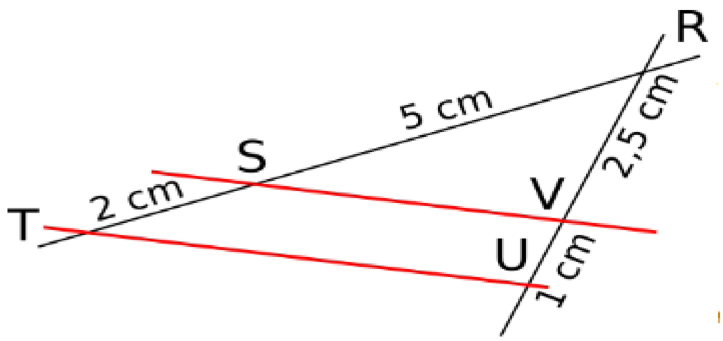
Si $\frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}$ et si les points A, M, B et A, C, N sont alignés dans le même ordre sur les deux droites, alors les deux droites (BC) et (MN) sont parallèles.



2.2 Remarque

L'ordre des lettres se déduit des quotients. Il doit y avoir une cohérence entre cet ordre et l'emplacement des points sur la figure.

Exemple :



Deux droites (TR) et (UR) sont sécantes en R. On a les données sur la figure.

Montrer que les droites (TU) et (SV) sont parallèles.

- Les droites (TR) et (UR) sont sécantes en R.
- $\frac{RT}{RS}=\frac{7}{5}=1{,}4$ et $\frac{RU}{RV}=\frac{3{,}5}{2{,}5}=1{,}4$
- De plus, les points R, S, T et R, V, U sont alignés dans cet ordre.

D'après la réciproque du théorème de Thalès, les droites (TU) et (SV) sont parallèles.