Fiche méthode 1 : Suites de type $u_{n+1} = a\,u_n + b$

1. Méthode

- On donne une suite (u_n) du type $u_{n+1} = a\,u_n + b$ qui n'est ni arithmétique ni géométrique.
- On introduit ensuite une deuxième suite (v_n) tel que $v_n = f(u_n)$.
- Pour démontrer que (v_n) est une suite géométrique :

  - Exprimer d'abord v_{n+1} en fonction de u_{n+1} puis de u_n ;

  - Puis calculer $\frac{v_{n+1}}{v_n}$. Ce rapport doit être égal à une constante ; c'est la raison q de (v_n).

  Rappel : le terme général d'une suite géométrique est $v_n = v_0 \times q^n$.

- Pour déterminer l'expression de u_n en fonction de n :

  - Exprimer d'abord u_n en fonction de v_n ;

  - Puis remplacer v_n par son expression

2. Exemple d'exercices

2.1 Énoncé classique

Soit la suite (u_n) définie sur IN* par $\begin{cases} u_1 = -3 \\ u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n - 6 \quad \text{pour tout} \quad n>1 \end{cases}$.

1. Calculer u_2, u_3, u_4.
2. Soit (v_n) la suite définie sur IN* par : $v_n = u_n + 18$.

   a) Montrer que (v_n) est une suite géométrique.

   b) Exprimer v_n en fonction de n puis u_n en fonction de n.

2.2 Solution

1. Calcul des termes u_2, u_3, u_4.

On a $u_2=\frac{2}{3}u_1-6=-8$, $u_3=\frac{2}{3}u_2-6=-\frac{34}{3}$ et $u_4=\frac{2}{3}u_3-6=-\frac{112}{9}$.

On constate que la suite (u_n) n'est ni arithmétique ni géométrique.

2. Étude de (v_n)

- On a $v_{n+1} = u_{n+1} + 18 =$ $v_{n+1}=u_{n+1}+18=\left(\frac{2}{3}u_n-6\right)+18$ d'où $v_{n+1}=\frac{2}{3}(u_n+18)$.
- Le rapport $\frac{v_{n+1}}{v_n}=\frac{2}{3}$ permet de conclure que (v_n) est une suite géométrique de raison $q=\frac{2}{3}$ et de premier terme $v_1 = u_1 + 18 = 15$.
- Expression de v_n en fonction de n : on a $v_n=15\times\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$
- Expression de u_n en fonction de n : on a $u_n = v_n - 18$ d'où $u_n=15\times\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}-18$