Série 5 : Exercices sur les suites numériques au baccalauréat

Session 2010 (5 points)

1 (u_n), $n \in IN$, est la suite numérique définie par $u_n = \frac{n-1}{n}$.

a) Calculer les trois premiers termes de (u_n). (1,5 pts)

b) Exprimer u_{3n+1} en fonction de n. (0,5 pt)

2 (v_n), $n \in IN$, est une suite arithmétique telle que $v_{75} = v_{12} + 504$.

a) Vérifier que la raison de (v_n) est égale à 8. (1 pt)

b) Sachant que $v_{32} = 176$, calculer la somme S définie par $S = v_{12} + v_{13} + \ldots + v_{75}$ (1,5 pts)

3 c) Prouver que (v_n) est strictement croissante. (0,5 pt)

Session 2009 (5 points)

1 Soit (u_n), $n \in IN$, la suite définie par $u_n = e^n$.

a) Calculer la valeur exacte de u_0 et celle de u_2. (0,5pt x 2)

b) Démontrer que pour tout $n \in IN$, $u_{n+1} = e \,.\, u_n$. (1 pt)

c) En déduire la nature de la suite $(u_n)_{n \in IN}$. (0,5 pt)

2 Soit (v_n), $n \in IN$, la suite définie par $v_n = \ln(u_n)$, où ln désigne la fonction logarithme népérien.

a) Démontrer que (v_n), $n \in IN$, est une suite arithmétique dont on précisera la raison et le premier terme (1pt + 0,25pt x 2)

b) Calculer la somme $S = v_0 + v_1 + \ldots + v_{121}$ (1pt)

Session 2008 (5 points)

1 $(U_n)_{,n\in IN}$ est la suite arithmétique définie par $u_{23} = 71$ et $u_{75} = 227$.

a) Calculer la somme S définie par $S = u_{23} + u_{24} + \ldots + u_{75}$. (1 pt)

b) Calculer la raison de la suite $(u_n)_{,n\in IN}$. (1 pt)

c) Exprimer u_n en fonction de n. (1 pt)

2 $(v_n)_{n\in IN}$ est la suite numérique définie, pour tout $n \in IN$, par $v_n = 2\left(\frac{5}{8}\right)^n$.

a) Exprimer v_{n+1} en fonction de v_n. (0,5 pt)

En déduire la nature et la raison de la suite $(v_n)_{n\in IN}$. (0,5 pt)

b) Calculer la limite de la suite $(v_n)_{n\in IN}$. (1 pt

Session 2007 (5 points)

Soient $(u_n)_{n\in IN}$ et $(v_n)_{n\in IN}$ deux suites numériques définies respectivement par $u_0 = 0$, $u_{n+1} = 2 - \frac{5}{u_n + 4}$

et $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 3}$ pour $n \in IN$.

1 Calculer u_1, v_0 et v_1. (0,25 pt x 3)

2 a) Montrer que $(v_n)_{n\in IN}$ est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{5}$. (1 pt)

b) Exprimer v_n en fonction de n. (1 pt)

3 a) Exprimer u_n en fonction de v_n. (1 pt)

b) En déduire l'expression de u_n en fonction de n. (0,5 pt)

c) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$. Que peut-on en conclure ? (0,5 pt + 0,25 pt)

Session 2006 (5 points)

Soient $(u_n)_{n\in IN}$ et $(v_n)_{n\in IN}$ deux suites numériques définies respectivement par $u_0 = 0$, $u_{n+1} = \frac{1}{2-u_n}$ et $v_n = \frac{1}{u_n - 1}$ pour $n \in IN$.

1 Calculer u_1, u_2, v_0 et v_1. (0,25 pt x 4)

2 a) Montrer que $(v_n)_{n\in IN}$ est une suite arithmétique de raison -1 (1 pt)

b) Donner l'expression de v_n puis de u_n en fonction de n. (0,5 pt + 0,5 pt)

3 Pour n>1, on pose $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_{n-1}$ et $P_n = w_0 \,.\, w_1 \,.\, \dots \,.w_{n-1}$ où $w_n = e^{u_n}$

a) Calculer S_n en fonction de n. (1 pt)

b) En déduire l'expression de P_n en fonction de n, puis la limite de P_n quand n tend vers $+\infty$. (0,5 pt) (0,5 pt)

Session 2005 (5 points)

Soient la suite numérique $(u_n)_{n\in IN}$ définie par la donnée de $U_0 = 10$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = \frac{u_n - 2}{2}$ pour tout $n \geq 1$ et $(v_n)_{n\in IN}$ la suite définie pour tout n par $v_n = \ln(u_n + 2)$.

1 Calculer u_1, v_0 et v_1. (1,5 pts)

2 a) Montrer que, pour tout n élément de IN, $v_{n+1} = \ln\left(\frac{u_n + 2}{2}\right)$ (1 pt)

b) En déduire que $(v_n)_{n\in IN}$ est une suite arithmétique de raison $r = -\ln(2)$ (1 pt)

c) Préciser le sens de variations de $(v_n)_{n\in IN}$. (0,5 pt)

3 Exprimer v_n en fonction de n. (0,5 pt)

4 Exprimer u_n en fonction de v_n en fonction de n. (0,25pt x 2)

Session 2004 (5 points)

Soit la suite arithmétique $(u_n)_{n \in IN^*}$ définie par la donnée des deux termes u_1 = -2 et U_{20} = 55.

1 Calculer la somme S = $u_1 + \ldots + u_{20}$. (0,5 pt)

2 Déterminer la raison r de cette suite. (1 pt)

3 Exprimer u_n en fonction de n. (0,5 pt)

4 Pour tout n ∈ IN*, on pose $v_n = e^{3n-5}$

a) Calculer v_1 et v_2. (0,5 pt x 2)

b) Montrer que $(V_n)_{n \in IN^*}$ est une suite géométrique dont on précisera la raison q. (1 pt)

c) Exprimer la somme $T_n = v_1 + v_2 + \ldots + v_n$ en fonction de n. (1 pt)

Session 2003 (5 points)

On considère la suite (u_n) définie par u_1 = 5 et $u_{n+1} = \frac{1}{4}u_n + \frac{3}{2}$. On pose $v_n = u_n - 2$.

1 Calculer u_2, u_3 et v_1. (0,75 pt)

2 b) Montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison. (1 pt)

3 Exprimer v_n puis u_n en fonction de n. (0,5 pt + 0,25 pt)

4 On pose $w_n = \ln(v_n)$ où ln est le logarithme népérien.

a) Montrer que (w_n) est une suite arithmétique dont on déterminera la raison et le premier terme. (1,5 pts)

b) Exprimer $S_n = w_1 + w_2 + \ldots + w_n$ en fonction de n. (1 pt)

Session 2002 (4 points)

On considère la suite numérique $(u_n)_{n\in IN}$ définie par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \dfrac{u_n^2 - u_n - 2}{u_n + 1}$ pour tout n de IN.

1 Calculer les quatre premiers termes de cette suite. (1 pt)

2 a) Montrer que $(u_n)_{n\in IN}$ est une suite arithmétique dont on précisera la raison. (1 pt)

b) Exprimer u_n en fonction de n. (0,5 pt)

c) Quel est le sens de variation de $(u_n)_{n\in IN}$? (0,25 pt)

3 Pour tout $n \in IN$, on pose $v_n = e^{2(1-n)}$.

a) Montre que $(v_n)_{n\in IN}$ est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison. (1 pt)

b) Calculer la limite de v_n quand n tend vers $+\infty$. (0,25 pt)