Série 4 : Exercices sur les suites arithmétiques

Exercice 1 :

Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 5$ et pour tout entier n, $u_{n+1} = 2\,u_n - 3$.

1. Calculer u_n pour $0 < n < 3$.
2. On pose, pour tout n, $v_n = u_n - 3$.
   a) Montrer que, pour tout n , $v_{n+1} = 2\,v_n$.
   b) En multipliant membre à membre les n égalités obtenues successivement en remplaçant p par 0, 1, 2, ... ; n-1 dans l'égalité $v_{p+1} = 2v_p$, calculer v_n, puis u_n en fonction de n.

Exercice 2 :

On considère la suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 = \dfrac{1}{3} \\ n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{u_n}{3u_n + 1} \end{cases}$.

1. Démontrer que la suite (v_n) définie par $v_n = \dfrac{1}{u_n}$ pour tout entier n, est une suite arithmétique dont on déterminera la raison et le premier terme.
2. Exprimer v_n, puis u_n en fonction de n.

Exercice 3 :

Soit (u_n) la suite définie par u_o et la relation de récurrence : $u_{n+1} = \dfrac{2u_n - 1}{2u_n + 5}$ $n \in \mathbb{N}$ et $u_n \neq -\dfrac{5}{2}$.

1. Calculer u_n pour n = 1, 2 et 3.
2. On suppose que u_n existe. Démontrer que l'on a $u_n \neq -1$ pour tout n.
3. Soit (v_n) la suite définie par $v_n = \dfrac{2u_n + 1}{u_n + 1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   Montrer que (v_n) est une suite géométrique.
4. Calculer v_n, puis u_n en fonction de n. En déduire $\lim(u_n)$ et $\lim(v_n)$.

Exercice 4 :

Soit la suite (u_n) définie par $u_1 = -3$ et $u_{n+1}=\frac{2}{3}u_n-6$ pour n entier non nul.

1. Calculer u_2 et u_3.
2. Soit (v_n) la suite définie par $v_n = u_n + 18$.
   a) Calculer v_1, v_2 et v_3.
   b) Montrer que (v_n) est une suite géométrique.
   c) Exprimer v_n, puis u_n en fonction de n.
3. Calculer la somme $S_n = v_1 + v_2 + \ldots + v_n$.

   En déduire la somme $S'_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n$.

Exercice 5 :

On considère la suite (u_n) définie par $u_1=\frac{11}{2}$ et $u_{n+1}=\frac{1+2u_n}{4}$ pour tout entier n puis la suite (v_n) définie par $v_n = -1 + 2u_n$.

1. Calculer v_1.
2. Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on déterminera la raison.
3. Exprimer v_n puis u_n en fonction de n. Calculer et $\lim(u_n)$.

Exercice 6 :

Une suite réelle est définie ainsi $u_0=1$, $u_1=3$ et pour tout entier n, $3u_{n+2}= 5u_{n+1} + a u_n$ où a est un réel non nul donné.

1. Calculer u_2, u_3, et u_3 en fonction de a.
2. Soit la suite (v_n) définie par $v_n= u_{n+1} - u_n$, pour tout entier n. Choisir a de telle sorte que (v_n) soit une suite géométrique ; dans la suite du problème on prend cette valeur de a.
3. Montrer que la suite (u_n) est strictement croissante.

Exercice 7 :

On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par $u_o = 5$, $u_n=-\frac{1}{5}u_{n-1}$ pour $n \in IN^*$ et $v_n=u_n-6$ pour $n \in IN$.

1. a) Calculer les termes u_1, u_2 et u_3 puis v_0, v_1, et v_2.

   b) Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on calculera la raison.

2. a) Exprimer v_n en fonction de n.

   b) En déduire l'expression de u_n en fonction de n et calculer $\lim(u_n)$.

Exercice 8 :

1. On considère la suite géométrique croissante (u_n) à termes positifs où n appartient à IN.
   Sachant que $u_0.u_2 = 36$ et $u_0+u_2 = 20$. Calculer la raison q et le premier terme u_0 de la suite (u_n).

2. Soit (v_n) la suite définie pour tout n de IN par $v_n = \ln(2.3^n)$ où ln est le logarithme népérien.

   a) Calculer les termes v_0, v_1 et v_2.

   b) Calculer $v_{n+1} - v_n$, pour tout $n \in$ IN. En déduire que (v_n) est une suite arithmétique et déterminer sa raison, puis sa variation.

   c) Déterminer la limite de la suite (v_n).

Exercice 9 :

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = -3$ et $u_{n+1}=\frac{2+u_n}{1+2u_n}$ pour tout $n \in$ IN. On pose $v_n=\frac{1-u_n}{1-u_n}$.

1. Calculer u_1 et u_2.
2. a) Montrer que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
   b) Exprimer v_n en fonction de n.
3. a) Exprimer u_n en fonction de v_n.
   b) En déduire l'expression de u_n en fonction de n.
   c) En déduire la limite de la suite (u_n).

Exercice 10 :

Soit la suite (u_n) définie par : $u_o = 4$ et $u_{n+1}=\frac{1}{4}u_n+\frac{9}{4}$ pour n naturel.

Soit la suite (v_n) définie, pour tout n, par $v_n= u_n + k$ où k est un réel fixé indépendant de n.

1. Écrire v_{n+1} en fonction de u_{n+1}, puis de u_n.
2. Écrire v_{n+1} en fonction de v_n.
3. Déterminer k pour que, pour $n \in$ IN, $v_{n+1}=\frac{1}{4}v_n$.
4. Écrire alors v_n en fonction de n. Puis u_n en fonction de n. Calculer $\lim(u_n)$.

Exercice 11 :

On considère la suite (u_n) définie par son terme général $u_n = \frac{(-1)^n \times 5}{2^n}$ pour $n \geq 1$.

1. Calculer les cinq premiers termes de cette suite.
2. Montrer que c'est une suite géométrique.
3. S'agit-il d'une suite croissante ? d'une suite décroissante ?

Exercice 12 :

1. Soit $n \in \mathbb{N}$, résoudre l'équation $\ln(7^n x) = 2n$.
2. Soit (v_n) la suite telle que $\ln(7^n v_n) = 2n$.
   a) Déterminer v_0.
   b) Montrer que (v_n) est une suite géométrique dont on déterminera la raison et le premier terme. (v_n) admet-elle une limite ?
3. Déterminer n_0 tel que pour tout $n > n_0$, $v_n > 100$.

Exercice 13 :

La saison est sèche et Rakoto a décidé de verser un seau d'eau au pied de chacun des jeunes arbres qui bordent son champ. Il y a cent arbres, en ligne droite, espacés de 2 m et la fontaine est au pied du premier. Rakoto ne porte qu'un seau à la fois. Il a commencé le travail. Son voisin, le prof de math, le regarde, accoudé au mur mitoyen.

- Sacré travail.

- Bah, dit Rakoto, j'en ai pour une heure !

- Une heure ! J'aurais le temps d'aller à pied à la ville et d'en revenir avant que tu n'aies fini.

Rakoto lève les yeux au cieux ! Le centre ville est à 9 km. Le prof a de l'instruction, d'accord, mais il y a des fois où, je vous jure…

Pour trancher le débat, calculer le chemin que Rakoto aura à parcourir pour arroser tous ses arbres.

Exercice 14 :

Selon les estimations de l'ONU, la population mondiale s'élevant en 1999 à 6 milliards d'habitants s'accroît de 1,9 % par an.

1. Supposer que ce taux de croissance reste constant. Par quel facteur la population mondiale sera-t-elle multiplié en l'an 2012 ?

   Quel sera alors l'effectif de la population mondiale ?

   Avec la même hypothèse (taux constant de 1,9 % l'an), déterminer l'effectif population mondiale dans un siècle.

2. Déterminer, à une année près, le temps nécessaire pour que la population mondiale double d'effectif.