Série 3 : Exercices sur les suites arithmétiques

Exercice 1 :

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = e$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1}=\sqrt{u_n}$.

1. On pose pour tout n entier naturel $v_n = \ln(u_n)$.
   Démontrer que (v_n) est une suite géométrique dont on déterminera le premier terme et la raison.
2. En déduire l'expression de v_n en fonction de n.
3. Calculer le produit $P_n = u_0.u_1. \dots u_n$ en fonction de n et étudier sa limite éventuelle.

Exercice 2 :

On considère la suite (u_n) définie par $u_n=\frac{n}{e}+e^{-n}$.

1. Montrer que la suite (v_n) de terme général $v_n=\frac{n}{e}$ est une suite arithmétique dont on précisera la raison et le premier terme.
2. Montrer que la suite (w_n) de terme général $w_n=e^{-n}$ est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
3. Calculer en fonction de n, $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$ et $S'_n = w_0 + w_1 + \dots + w_n$.
   En déduire $\sigma_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$.
4. Étudier, lorsqu'elles existent, les limites respectives de S_n, S'_n et σ_n.

Exercice 3 :

Soit la suite arithmétique (u_n) de raison r ($r \geq 0$) telle que, dans cet ordre, u_2, u_4 et u_7 sont trois nombres consécutifs d'une suite géométrique de raison q ($q \geq 1$).

1. Montrer que $u_0 = 2r$ et $q=\frac{3}{2}$.
2. Sachant que $u_2 = 3$, calculer u_0 puis u_n en fonction de n.
3. Soit la suite (v_n) définie par $v_n=e^{u_n}$.
   Calculer $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$.
4. En déduire $P_n = v_0 .v_1 . \dots . v_n$.

Exercice 4 :

On suppose que l'inflation annuelle est de 10% pendant la période considérée.

1. Le prix P(n) en francs d'une marchandise au 1er janvier de l'année (2018 + n) avec $n \in \mathbb{N}$ vérifie la relation : $\begin{cases} n=0, \ P(0)=5\ 000\ 000 \\ n \in \mathbb{N} \ \ P(n+1)=P(n)+\frac{10}{100}P(n) \end{cases}$

   a) Calculer P(1) puis P(2).
   b) Exprimer P(n) en fonction de n. En déduire P(10).

2. Une personne place un capital de 5 000 000 Ar au 1er janvier 2018 dans une banque qui lui offre 8% d'intérêts au cours des six premières années.

   a) Quel sera son capital le 1er janvier 2024 ?
   b) Quel taux d'intérêt devra-t-elle ensuite obtenir pour conserver son pouvoir d'achat au 1er janvier 2028 ?

On rappelle qu'à la fin de chaque année, le capital est augmenté des intérêts qu'il a produit durant cette année.

Exercice 5 :

Un père décide de verser une rente à chacun de ses fils, Rakoto et Rabe. Les versements sont effectués chaque 1er du mois, pendant un an, à partir du 1er janvier 2010 où ils reçoivent chacun 450 000 Ar. Pour tenir compte de l'augmentation du coût de la vie, Rakoto recevra chaque mois a francs de plus que le mois précédent.

Rabe recevra chaque mois 1% de plus que le mois précédent.

1. Quels sont les montants reçus par Rakoto et Rabe le premier 1er février 2010 ?
2. Exprimer, en fonction de nombre n de mois écoulés depuis le 1er janvier 2010, le montant reçu au début d'un mois par chacun des fils.
3. Quels sont les montants reçus le 1er décembre 2010 par Rakoto et Rabe ?
4. Calculer le montant total S_1 des revenus de Rakoto au 31 décembre 2010.
5. Calculer le montant total S_2 des revenus de Rabe au 31 décembre 2010.
6. Calculer numériquement S_2, lorsque a=4750 Ar. Rabe avait-il raison de se plaindre (éventuellement) le 1er février 2010 ?
7. À partir de quel valeur de a, a-t-on $S_1 > S_2$?

Exercice 6 :

On a des objets cylindriques que l'on empile de la manière suivante. On en place d'abord un certain nombre à côté les uns des autres sur un plan horizontal, puis on forme une seconde couche horizontale en mettant les objets dans les intervalles qui se trouvent entre ceux de la première, et ainsi de suite, de sorte que chaque couche horizontale renferme un objet de moins que la précédente.

Combien y a-t-il d'objets dans la pile, sachant qu'il y a 12 couches horizontales et que la couche supérieure renferme 42 objets ?

Exercice 7 :

On a des objets sphériques égaux ; on les dispose tout d'abord dans un plan horizontal en forme de triangle équilatéral, en plaçant 5 sur une ligne, puis 4 sur une ligne parallèle de manière que chacun touche deux des précédents, puis 3 sur une nouvelle ligne parallèle, puis 2, puis 1.

On pose ensuite des objets sur les précédents, de manière que chacun d'eux repose sur 3 des précédents ; on obtient ainsi un nouveau triangle équilatéral dont chaque côté renferme 4 objets au lieu de 5 et l'on continue de même jusqu'à ce que l'on ait terminé le pyramide triangulaire par un objet placé au sommet.

1. Quel sera le nombre total d'objets employés ?
2. Quel serait-il si le côté du triangle de base renfermait 45 objets ?

Exercice 8 :

Un roi décide de distribuer à ses ministres une certaine quantité de pièces d'or.

En toute équité, il répartit ainsi les pièces : au premier des ministres, il donne 5 pièces d'or ; au second, le double du premier moins 2 pièces ; et ainsi de suite. Au $n^{ième}$ ministre, le double du $(n-1)^{ième}$ ministre moins n pièces.

Le $n^{ième}$ ministre, avide, désire sa part sans attendre son tour.

Peut-on exprimer le nombre de pièces d'or à donner au $n^{ième}$ ministre, en fonction de son rang ?

Quelle est sa part, si n = 10 ?

1. Soit a_n le nombre de pièces d'or reçues par le $n^{ième}$ ministre.
   Vérifier que $a_1 = 5$ et $a_n = 2\, a_{n-1} - n$ (si $n > 2$).

2. On pose $v_n = a_n - n - 2$. Montrer que la suite (v_n) est géométrique.

3. Conclure.