Série 1 : Exercices sur les suites numériques

Sens de variation

Exercice 1 :

Montrer que la suite (u_n) de terme général $u_n = 2^n$, $n \in$ IN, est strictement croissante.

Exercice 2 :

Montrer que la suite (u_n) de terme général $u_n = \frac{1}{3^n}$ est strictement décroissante.

Exercice 3 :

Soit a un réel positif et (u_n) une suite de terme général $u_n = a^n$, $n \in$ IN.

Calculer $u_{n+1} - u_n$. Montrer que (u_n) est monotone.

Exercice 4 :

Montrer que la suite (u_n) de terme général $u_n = (-2)^n$, $n \in$ IN, n'est pas une suite monotone.

Même question pour $u_n = (-4)^n \times n$.

Exercice 5 :

On pose, pour tout $n \in$ IN, $u_n = \frac{3}{n+2}$.

1. Préciser u_0, u_1, ..., u_{10}.
2. Montrer que (u_n) est une suite décroissante, et qu'il est possible de trouver un entier n_0 tel que, pour $n > n_0$, $0 < u_n < 10^{-4}$.

Exercice 6 :

Soit (u_n) la suite de terme général $u_n = \frac{2n+1}{n+3}$.

1. Calculer u_n pour $0 \le n \le 5$.
2. Montrer que (u_n) est strictement croissante.
3. Calculer $v_n = 2 - u_n$, et en déduire qu'il est possible de trouver un entier n_0 tel que, pour $n > n_0$, $2 - 10^{-5} < u_n < 2$

Exercice 7 :

Une suite (u_n) est déterminée par son premier terme u_0 et la relation de récurrence, $u_{n+1}=\frac{1}{3}u_n+8$ pour tout entier n.

1. Montrer qu'il est possible de choisir u_0 pour que la suite (u_n) soit stationnaire.
2. Même question pour $u_{n+1}=\frac{1}{2}u_n-7$

Exercice 8 :

Soit (u_n) la suite définie par $u_{n+1}=\sqrt{6-u_n}$. Choisir u_0 pour que (u_n) soit une suite constante.

Exercice 9 :

Déterminer la nature et le sens de variation de chacune des suites (u_n) suivantes :

a) $u_n=2(n-3)$ b) $u_n=9\times 3^{n+1}$ c) $u_n=2^{n+1}-5\times 2^{n+2}$

Exercice 10 :

Soit la suite (u_n) définie par la donnée de u_0 et la relation de récurrence : pour tout n ∈ IN, $u_{n+1}=2u_n-a$

1. Pour quelle valeur a de u_0 la suite (u_n) est-elle stationnaire ?

Dans la suite, on suppose que u_0 est différent de a.

2. Calculer u_1 - u_0 en fonction de u_0.
3. Montrer que, pour n non nul, on a : u_{n+1}- u_n = 2 (u_n - u_{n-1}).

   En déduire que la suite (u_n) est strictement croissante si u_0 > a et strictement décroissante si u_0 < a.

Limite d'une suite

Exercice 11 :

(u_n) est la suite définie pour tout entier naturel n par $u_{n+1}=\dfrac{2u_n-1}{5u_n+2}$.

1. La suite est-elle monotone à partir d'un certain rang ?
2. Montrer que (u_n) a pour limite 2/5.
3. À partir de quel rang a-t-on $\left|u_n-\dfrac{2}{5}\right|<10^{-3}$?

Exercice 12 :

(u_n) est la suite définie pour tout entier naturel n par $u_{n+1}=\dfrac{3u_n+4}{u_n+1}$.

1. Montrer que (u_n) est décroissante.
2. Trouver un rang p tel que $u_p > 7/2$.
   Pourquoi, pour un rang n > p n'a-t-on pas nécessairement $u_n > 7/2$.
3. Montrer que u_n ne peut pas dépasser 5, c'est-à-dire que pour tout entier n, $u_n < 5$.
4. Quelle est la limite de (u_n) ?