Série 3 : Exercices sur la fonction exponentielle au baccalauréat

Session 2013 – Problème (10 points)

Soit f la fonction numérique définie sur [0 ; +∞ [par $f(x)=\frac{4e^x}{e^x+1}$. On note par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé d'unité graphique 1cm.

		A1	A2
1	a) Vérifier que pour tout x>0, $f(x)=4(1-\frac{1}{e^x+1})$.	(1 pt)	(0,5 pt)
	b) En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$	(0,75 pt)	(0,5 pt)
	c) Interpréter graphiquement le résultat.	(0,5 pt)	(0,25 pt)
2	a) Prouver que pour tout x ≥ 0, $f'(x)=\frac{4e^x}{(e^x+1)^2}$ où f' désigne la dérivée de f.	(1 pt)	(1 pt)
	b) Après avoir étudié le sens de variation de f, dresser son tableau de variations.	(1,5 pt)	(1 pt)
3	a) Calculer à 10^{-2} près f(0), f(1) et f(2).	(0,75 pt)	(0,75 pt)
	b) Écrire l'équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse $x_0 = 0$.	(1 pt)	(1 pt)
4	Tracer (T) et (C), avec son asymptote, dans le même repère.	(1,5 pts)	(1,5 pts)
5	Soit F la fonction définie sur]0 ; +∞ [par $F(x)=4\ln(e^x+1)$.		
	a) On rappelle que $(\ln U)'=\frac{U'}{U}$. Démontrer que F est une primitive de f.	(1 pt)	(0,5 pt)
	b) En déduire, en cm² et à 10^{-2} près, l'aire A du domaine plan limité par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations x = 0 et x = 2. *On donne e ≈ 2,7 ; e² ≈ 7,38 ; ln(e²+1) ≈ 2,12 et ln(2) ≈ 0,7.*	(1 pt)	(1 pt)
	Pour A2 seulement		
6	Soit G la fonction définie sur IR par $G(x)=\frac{4e^x}{e^x+1}$. On note par (Γ) sa courbe représentative.		
	a) Démontrer que, pour tout réel x, G(-x) - G(x) = 4. Que signifie ce résultat pour la courbe (Γ) ?		(1 pt)
	b) Tracer, à partir de (C), la courbe (Γ) dans le même repère.		(1 pt)

Session 2011 – Problème (10 points)

Soit f la fonction numérique définie sur IR par $f(x)=e^x(e^x-2)-3$.

On note (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j})$ d'unité 1cm.

1 Vérifier que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-3$. Interpréter géométriquement ce résultat.

2 a) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

b) Sachant que $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}=+\infty$, que peut-on dire pour la courbe (C) ?

3 Déterminer les coordonnées de A, point d'intersection de la courbe (C) avec l'axe des abscisses (x'Ox).

4 a) Vérifier que pour tout x réel, $f'(x)=2e^x(e^x-1)$ où f' est la fonction dérivée de f.

b) Étudier le sens de variations de f et dresser son tableau de variations sur IR.

5 Écrire une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse x_0 = ln(3).

6 Montrer que le point I (-ln(2) ; -15/4) est un point d'inflexion pour la courbe (C).

7 Tracer (T) et (C) dans le même repère.

Pour A2 seulement

8 Soit F la fonction définie sur IR par $F(x)=\frac{1}{2}e^{2x}-2e^x-3x$

a) Prouver que F est une primitive de f sur IR.

b) Calculer, en cm², l'aire A du domaine plan délimité par la courbe (C), l'axe des abscisses (x'Ox) et les droites d'équations respectives x = 0 et x = ln(3).
On donne ln(2) ≈ 0,7 et ln(3) ≈ 1,1.

Session 2009 – Problème (10 points)

Soit F la fonction définie pour tout x réel par $f(x) = -x+3+e^{x}$. On appelle (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ d'unité graphique 1cm.

		A1	A2
1	a) Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$	(0,5 pt)	(0,25 pt)
2	a) Démontrer que pour tout x réel, $f(x) = -x\left(1 - \frac{3}{x} - \frac{e^{x}}{x}\right)$	(0,5 pt)	(0,25 pt)
	b) Sachant que $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^{x}}{x} = +\infty$, calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$	(1 pt)	(0,5 pt)
	c) Démontrer que la droite (Δ) d'équation y = -x + 3 est une asymptote oblique pour la courbe (C) au voisinage de -∞.	(1 pt)	(1 pt)
3	a) Résoudre dans IR l'équation $e^{x} - 1 = 0$.	(1 pt)	(1 pt)
	b) Démontrer que pour tout x réel, $f'(x) = -1 + e^{x}$	(1 pt)	(0,5 pt)
	c) Étudier le signe de f'(x) sur IR.	(1 pt)	(0,5 pt)
	d) Dresser le tableau de variations de f.	(1 pt)	(1 pt)
4	a) Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe (C) d'abscisse x_0=0.	(1 pt)	(1 pt)
	b) Tracer dans le même repère la droite (Δ), la tangente (T) et la courbe (C).	(0,5x2 pt +1 pt)	(0,5x2 pt +1 pt)
	Pour A2 seulement		
5	Soit F la fonction définie sur IR par $F(x) = -\frac{x^{2}}{2} - 3x + e^{x}$.		
	a) Démontrer que F est une primitive de f sur IR.		(1 pt)
	b) Calculer, en cm² et à 10^{-2} près, l'aire A du domaine plan limité par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations x = 0 et x = 1.		(1 pt)

Session 2007 – Problème (10 points)

Soit la fonction numérique f de la variable réelle x définie par $f(x)=\frac{2e^x-e^{2x}}{2}$. On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j})$ d'unité graphique 2cm.

		A1	A2
1	a) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$. Interpréter graphiquement le résultat.	(0,5 pt+ 0,5 pt)	(0,5 pt+ 0,5 pt)
2	Démontrer que pour tout x réel, $f(x)=e^x(1-\frac{1}{2}e^x)$, en déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.	(0,5 pt+ 0,5 pt)	(0,5 pt+ 0,5 pt)
3	a) Déterminer la fonction dérivée f'(x) et montrer que pour tout x réel, $f'(x)=e^x(1-e^x)$	(1 pt + 0,5 pt)	(0,5 pt + 0,5 pt)
	b) Étudier le signe de f'(x) sur IR.	(0,5 pt)	(0,5 pt)
	c) En déduire le tableau de variations de f.	(1,5 pt)	(1 pt)
4	a) Déterminer les coordonnées du point A, intersection de la courbe (C) avec l'axe des abscisses.	(1 pt)	(0,5 pt)
	b) Écrire une équation de la tangente (T) à la courbe (C) au point d'abscisse $x_0 = \ln(2)$.	(1 pt)	(0,5 pt)
5	En remarquant que, pour tout x réel, $\frac{f(x)}{x}=\frac{e^x}{x}(1-\frac{1}{2}e^x)$, calculer $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$. Interpréter graphiquement le résultat. *(On admet que* $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}=+\infty$ *)*	(0,5 pt + 0,5 pt)	(0,5 pt + 0,5 pt)
	b) Tracer la courbe (C) et la tangente (T).	(1 pt + 0,5 pt)	(1 pt + 0,5 pt)

Pour A2 seulement

		A2
7	a) Montrer que pour tout x réel, $f(x)=e^x-\frac{1}{2}e^{2x}$.	(0,5 pt)
	b) Déterminer une primitive de f sur IR.	(0,5 pt)
	c) En déduire, en cm², l'aire géométrique A du domaine plan limité par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations x = 0 et x = ln(2). *On donne ln(2) ≈ 0,7 et e ≈ 2,7.*	(1 pt)

Session 2005 – Problème (10 points)

Soit la fonction numérique f définie sur IR par $f(x)=4x^2e^{2x}$. On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ d'unité graphique 4cm.

		A1	A2
1	a) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$.	(0,5 pt+ 0,5 pt)	(0,5 pt+ 0,5 pt)
	b) Interpréter graphiquement les résultats précédents.	(0,5 pt)	(0,5 pt)
	c) En admettant que $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x=0$ et en remarquant que $f(x)=[2xe^x]^2$, calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$	(0,5 pt)	(0,5 pt)
2	a) Montrer que, pour tout x élément de IR, $f'(x)=8x(x+1)e^{2x}$.	(1 pt)	(1 pt)
	En déduire le signe de f'(x) suivant les valeurs de x	(1 pt)	(0,5 pt)
	b) Compléter le tableau de valeurs ci-dessous :	(1 pt)	(1 pt)

x	-1	-1/2	0	1/2
f(x)				

	c) Dresser le tableau de variations de f.	(2 pts)	(1,5 pts)
3	a) Trouver l'équation de la tangente à la courbe (C) au point d'abscisse $\frac{1}{2}$.	(1,5 pts)	(1 pt)
	b) Tracer la courbe (C) dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.	(1,5 pts)	(1 pt)

Pour A2 seulement

4 Soit la fonction F définie sur IR par $F(x)=(2x^2-2x+1)e^{2x}$.

a) Calculer F'(x). (1 pt)

b) Calculer, en cm², l'aire de la partie du plan limitée par la courbe (C), l'axe des abscisses (x'Ox) et les droites d'équations x = -1 et x = 0. (1 pt)

On donne $e^{-2} \approx 0,16$; $e^{-1} \approx 0,4$ et $e \approx 2,7$.

Session 2003 – Problème (10 points)

Soit f la fonction définie par $f(x)=1-2x+e^x$. On note (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ d'unité 1cm.

		A1	A2
1	a) Déterminer l'ensemble de définition de f.	(0,75 pt)	(0,5 pt)
	b) Calculer $\lim_{x\to-\infty} f(x)$	(0,75 pt)	(0,5 pt)
	c) En remarquant que, pour tout x > 0, $f(x)=x(\frac{1}{x}-2+\frac{e^x}{x})$, calculer $\lim_{x\to+\infty} f(x)$. (On donne $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}=+\infty$)	(0,75 pt)	(0,5 pt)
2	a) Calculer f'(x).	(1 pt)	(0,75 pt)
	b) En déduire le tableau de variations de f.	(1,25 pts)	(1 pt)
3	a) Déterminer les coordonnées du point A, intersection de la courbe (C) avec l'axe des ordonnées.	(1 pt)	(0,75 pt)
	b) Écrire l'équation de la tangente (T) à (C) au point A.	(1 pt)	(1 pt)
4	a) Calculer $\lim_{x\to-\infty}[f(x)-(-2x+1)]$. Que peut-on en conclure ?	(1 pt)	(1 pt)
	b) Étudier la branche infinie de (C) lorsque x tend vers +∞. On admet que $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=+\infty$	(1 pt)	(0,75 pt)
5	Tracer (C).	(1,5 pts)	(1,25 pts)
	Pour A2 seulement		
6	a) Donner une primitive de f sur IR.		(1 pt)
	b) En déduire l'aire géométrique en cm² du domaine plan limité par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations x = 0 et x = ln(2). *On donne ln(2) ≈ 0,7.*		(1 pt)

Session 2001 – Problème (12 points)

Soit f la fonction numérique définie par $f(x)=(1-x)e^x-1$. On note (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ d'unité 1cm.

1 Déterminer l'ensemble de définition de f. (0,5 pt)

2 a) Calculer la limite de f en +∞. (0,5 pt)

b) Sachant que $\lim_{x\to-\infty} e^x x=0$, montrer que $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-1$. (0,5 pt)

Donner une interprétation graphique de ce résultat. (0,5 pt)

3 a) Calculer la fonction dérivée f'(x) et étudier son signe. (1 pt)

b) Dresser le tableau de variations de f. (1 pt)

4 a) Calculer les coordonnées du point d'intersection A,de la courbe (C) avec la droite (D) d'équation y = -1. (1 pt)

b) Écrire l'équation de la tangente (T) à la courbe (C) au point d'abscisse 1. (1 pt)

5 a) Calculer $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$ (On pourra écrire $\frac{f(x)}{x}=\frac{1-x}{x}e^x-\frac{1}{x}$). (0,5 pt)

Que peut-on en conclure ? (0,5 pt)

b) Reproduire le tableau suivant et donner, pour chaque valeur de x, une valeur de f(x) approchée à 10^{-2} près : (1,5 pts)

x	-3	-1	ln(5)
f(x)			

c) Tracer (C), (D) et (T). (2 pts)

6 Soit F la fonction définie sur IR par $F(x)=(2-x)e^x-x$

a) Montrer que F est une primitive de f sur IR. (0,5 pt)

b) Calculer, en cm², l'aire A du domaine plan limité par la courbe (C), l'axe des abscisses (x'Ox) et les droites d'équations x = 0 et x = 1. (1 pt)

On donne $e^{-1}\approx 0,37$; $e^{-3}\approx 0,05$ et $\ln(5)\approx 1,61$.

Session 1999 – Problème (12 points)

Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie sur [0 ; +∞[par $f(x)=-x+1-e^{-x}$.

On note (C) la courbe représentative de f dans un plan P muni d'un repère orthonormé $R=(O,\vec{i},\vec{j})$ d'unité 2 cm.

1 a) Déterminer la limite de f en +∞. (1pt)

b) Montrer que la droite (D) d'équation y = -x + 1 est asymptote à la courbe (C). (1 pt)

2 a) Montrer que pour tout x ≥ 0, $f'(x)=-1+e^{-x}$, où désigne la fonction dérivée de f. (1 pt)

b) En déduire le tableau de variations de f sur [0 ; +∞[. (1 pt)

3 a) Compléter le tableau de valeurs suivants : (1 pt)

x	0	1	2	3	4
f(x)					

b) Écrire l'équation de la tangente (T) à la courbe (C) au point d'abscisse $x_0 = 0$. (1 pt)

c) Représenter graphiquement les droites (D), (T) et la courbe (C) dans P. (3 pts)

4 Pour tout x > 0, on pose $F(x)=-\frac{x^2}{2}+x+e^{-x}$

a) Montrer que F est une primitive de f sur IR. (2 pts)

b) En déduire, en cm², l'aire du domaine plan limité par la courbe (C), l'axe des abscisses (x'Ox) et les droites d'équations x = 0 et x = 1. (1 pt)

On donne $e^{-1} \approx 0,36$; $e^{-2} \approx 0,13$ et $e^{-3} \approx 0,05$.

Session 1998 – Problème (12 points)

On considère la fonction numérique f définie par $f(x)=x-4+\frac{2}{1+e^{x}}$.

On note par (C) sa courbe représentative de f dans un repère orthonormé $R=(O,\vec{i},\vec{j})$ d'unité 2 cm.

1 Donner l'ensemble de définition de f.

2 a) Calculer $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

b) Montrer que la droite d'équation y = x - 4 est une asymptote oblique de la courbe (C).

c) Calculer $\lim_{x\to-\infty} [f(x)-(x-2)]$. Que peut-on conclure ?

d) Préciser la position de (C) par rapport à ses asymptotes.

3 a) Calculer la fonction dérivée f' de f.

b) Dresser le tableau de variations de f.

4 a) Montrer que le point I (0 ; -3) est un centre de symétrie pour (C).

b) Donner l'équation de la tangente (T) à (C) au point I.

c) Vérifier que I est un point d'inflexion pour (C).

5 Tracer (T) et (C) dans un même repère.

6 a) Montrer que f peut s'écrire sous la forme $f(x)=x-2-\frac{2e^{x}}{1+e^{x}}$

b) Soit g $g(x)=\ln(1+e^{x})$ Calculer la fonction dérivée g' de g.

c) En déduire une primitive F de f.

d) Calculer, en cm² et à 10^{-1} près, l'aire du domaine plan limité par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations x = 0 et x = 2.
On donne ln(2) ≈ 0,70 et ln(e^2+1) ≈ 2,13.