Série 3 : Exercices sur le logarithme népérien au baccalauréat

Session 2012 – Problème (10 points)

On considère la fonction numérique f définie sur]0 ; +∞ [par $f(x)=2x-1-2\ln(x)$.

On note par (C) la courbe représentative de f dans un plan muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ d'unité 2cm.

		A1	A2
1	Vérifier que $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=+\infty$. Que peut-on en conclure ?	(0,75 pt + 0,5 pt)	(0,5 pt + 0,25 pt)
2	a) Montrer que pour tout x ∈]0 ; +∞ [, $f(x)=x(2-\frac{1}{x}-2\frac{\ln(x)}{x})$	(0,5 pt)	(0,75)
	b) On donne $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)}{x}=0$, Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$	(0,75 pt)	(0,5 pt)
	c) Sachant que $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=2$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-2x]=-\infty$, Interpréter graphiquement la courbe (C) et la droite (D) : y = 2x.	(0,5 pt)	(0,5 pt)
3	a) Démontrer que pour tout x ∈]0 ; +∞ [, $f'(x)=\frac{2x-2}{x}$ où f' est la fonction dérivée de f.	(1 pt)	(0,75 pt)
	b) Étudier le signe de f'(x) sur]0 ; +∞ [.	(1 pt)	(0,75 pt)
	c) Dresser le tableau de variation de f.	(1 pt)	(1 pt)
4	a) Calculer, à 10^{-1} près, f(2), f(3) et f(e). *(On donne ln(2) ≈ 0,7 ; ln(3) ≈ 1,1 et e ≈ 2,7)*	(0,5 pt x3)	(0,25 pt x3)
	b) Écrire une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse $x_0=2$.	(1 pt)	(0,75 pt)
	c) Tracer (T), (D) et (C) dans le même repère.	(1,5 pts)	(1,5 pts)

Pour A2 seulement

		A2
5	Soit F la fonction définie sur]0 ; +∞ [par $F(x)=x^2+x-2x\ln(x)$.	
	a) Calculer F'(x) et montrer que F est une primitive de f sur]0 ; +∞ [.	(1 pt)
	b) Calculer, en cm^2, l'aire A du domaine plan limité par la courbe (C), l'axe des abscisses (x'Ox) et les droites d'équations respectives x = 1 et x = e	(1 pt)

Session 2010 – Problème (10 points)

On considère la fonction numérique f définie sur]0 ; +∞ [par $f(x)=x-2\ln(x)$.

On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ d'unité 2cm.

		A1	A2
1	a) Vérifier que $f(x)=x(1-2\frac{\ln(x)}{x})$ pour tout réel strictement positif x.	(0,5 pt)	(0,5 pt)
	b) Sachant que $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)}{x}=0$, déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$	(1 pt)	(0,75 pt)
	c) On sait que $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}} f(x)=+\infty$. Que signifie ce résultat pour la courbe (C) ?	(0,5 pt)	(0,5 pt)
2	a) Justifier que pour tout réel strictement positif, $f'(x)=\frac{x-2}{x}$ où f' est la fonction dérivée de f.	(0,5 pt)	(0,5 pt)
	b) Étudier le signe de $\frac{x-2}{x}$ sur]0 ; +∞ [.	(1 pt)	(0,75 pt)
	c) Dresser le tableau de variation de f.	(1,5 pts)	(1,25 pts)
3	a) Expliquer pourquoi la courbe (C) passe par les trois points A(1 ; 1), B(2 ; 2-ln(2)) et C(e ; e-2)	(1 pt)	(0,75 pt)
	b) Déterminer une équation de la tangente (T) à (C) en x_0 = 2.	(1 pt)	(0,75 pt)
4	a) Placer dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ les points A, B et C. *On prend ln(2) = 0,7 et e = 2,7.*	(1 pt)	(0,75 pt)
	b) Tracer (T), (D) et (C) dans le même repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.	(2 pts)	(1,5 pts)

Pour A2 seulement (Indépendante des questions précédentes)

g est la fonction numérique définie sur IR par $g(x)=\frac{14x}{x^2+3}$.

On désigne par (Γ) sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O,\vec{i},\vec{j})$ tel que $\|\vec{i}\|=1{,}5\text{cm}$ et $\|\vec{j}\|=2\text{cm}$.

		A2
	a) Vérifier que pour tout x réel, on a $g(x)=7\frac{u'(x)}{u(x)}$ où u' est la fonction dérivée de la fonction numérique u définie sur IR par $u(x)=x^2+3$. En déduire une primitive G sur IR de la fonction g.	(0,5 pt + 0,5 pt)
	b) Calculer en cm² l'aire exacte A du domaine plan limité par la courbe (Γ), l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x=\sqrt{3}$ et x = 0.	(1 pt)

Session 2008 – Problème (10 points)

f est la fonction numérique définie sur]0 ; +∞[par $f(x)=\frac{1}{x}\ln(x)$.

On note (C) la courbe représentative de f muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ d'unité 2 cm .

		A1	A2
1	a) Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$. Interpréter graphiquement le résultat.	(1pt+0,5pt)	(0,5 pt x 2)
	b) On rappelle que $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)}{x}=0$. En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.	(1 pt)	(0,5 pt)
2	a) Montrer que pour tout réel strictement positif, $f'(x)=\frac{1-\ln(x)}{x^2}$ où f' est la fonction dérivée de f.	(1,5 pt)	(1 pt)
	b) Résoudre dans]0 ; +∞ [l'équation $1-\ln(x)=0$	(1 pt)	(0,5 pt)
	c) Dresser ensuite le tableau de variation de f sur]0 ; +∞ [.	(1,5 pts)	(1,5 pts)
3	a) Donner une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse $x_0 = 1$.	(1 pt)	(1 pt)
	b) Tracer, uniquement sur l'intervalle] 0 ; e], la courbe (C), son asymptote verticale et ses deux tangentes aux points A et B(e ; 1/e) dans le même repère $(O,\vec{i},\vec{j})$. *(On prendra e = 2,7 et 1/e = 0,4 ; uniquement pour construire).*	(0,5 pt x 3 + 1 pt)	(0,5 pt x 3 + 1 pt)
	Pour A2 seulement		
4	F est la fonction numérique définie par $F(x)=\frac{1}{2}(\ln x)^2+3$ pour tout réel x strictement positif.		
	a) Montrer que F est une primitive de f sur]0 ; +∞ [.		(1 pt)
	b) En déduite l'aire, en cm², du domaine plan délimité par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations x = 1 et x = e.		(1 pt)

Session 2004 – Problème (10 points)

On considère la fonction numérique f définie sur l'intervalle] 0 ; +∞ [par $f(x)=\frac{1}{x}-1+\ln(x)$.

On note par (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ d'unité 2cm.

		A1	A2
1	a) Calculer f'(x) pour tout réel strictement positif.	(1 pt)	(1 pt)
	b) Étudier le signe de f'(x) suivants les valeurs de x.	(0,5 pt)	(0,5 pt)
2	Calculer $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.	(0,5 pt)	(0,25 pt)
3	a) Montrer que f(x) peut s'écrire $f(x)=\frac{1-x+x\ln(x)}{x}$ pour x ∈] 0 ; +∞ [	(0,5 pt)	(0,25 pt)
	b) En admettant que $\lim_{x\to0^+} x\ln(x)=0$, en déduire $\lim_{x\to0^+} f(x)$	(0,5 pt)	(0,25 pt)
4	Dresser le tableau de variations de f.	(1 pt)	(1 pt)
5	Compléter le tableau de valeurs ci-dessous :	(1 pt)	(1 pt)

x	1/e	1	2	e
f(x)				

		A1	A2
6	a) Calculer f''(x) pour tout x ∈] 0 ; +∞ [et étudier son signe sur cet intervalle.	(1 pt)	(0,5 pt)
	b) En déduire que le point I d'abscisse 2 est un point d'inflexion de (C).	(0,5 pt)	(0,5 pt)
	c) Trouver une équation de la tangente (T) à (C) en I.	(1 pt)	(0,5 pt)
7	a) On admet que $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=0$. Quelle conclusion peut-on en tirer sur la courbe (C°) ?	(0,5 pt)	(0,25 pt)
	b) Tracer (C) et (T).	(1,5 pts + 0,5 pt)	(1,5 pts + 0,5 pt)

Pour A2 seulement

8 Soit la fonction G définie par $G(x)=x\ln(x)-x$ pour tout réel x ∈] 0 ; +∞ [.

a) Calculer G'(x) pour tout x élément de l'intervalle] 0 ; +∞ [. (0,25 pt)
En déduire une primitive de f sur l'intervalle] 0 ; +∞ [. (0,75 pt)

b) Calculer, en cm², l'aire du domaine plan limité par la courbe (C), l'axe des abscisses (x'Ox) et les droites d'équations respectives x = 1 et x = e. (1 pt)

On donne 1/e ≈ 0,36 ; ln(2) ≈ 0,7 et e ≈ 2,7.

Session 2002 – Problème (12 points)

On considère la fonction numérique f définie par $f(x)=\ln(x)(\ln(x)-1)$.

On note (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$ d'unité 1 cm.

1	a) Déterminer l'ensemble de définition D_f de f.	(0,5 pt)
	b) Calculer les limites aux bornes de D_f.	(0,5 pt+0,5 pt)
	c) Montrer que pour tout x ∈ D_f, $f'(x)=\frac{2}{x}(2\ln(x)-1)$.	(1 pt)
	d) Dresser le tableau de variations de f.	(1 pt)
2	a) Déterminer les coordonnées des points d'intersection entre (C) et l'axe (x'Ox).	(1 pt)
	b) Donner une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse x = e.	(0,5 pt)
	c) Montrer que (C) admet d'un point d'inflexion I dont on déterminera les coordonnées.	(1 pt)
3	a) Étudier les branches infinies de (C) (on admet que $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=0$).	(0,25 pt + 0,25 pt)
	b) Calculer $f(e^{-1})$ et $f(e^2)$.	(0,5 pt+ 0,5 pt)
	c) Construire (T) et (C).	(0,5 pt + 1,5 pts)
4	Soit F la fonction définie par $F(x)=2x(\ln x)^2-6x\ln(x)+6x$	
	a) Montrer que F est une primitive de f sur D_f.	(1 pt)
	b) Calculer, en cm², l'aire du domaine plan limité par la courbe (C), l'axe des abscisses (x'Ox) et les droites d'équations respectives x = 1 et x = e. *On donne $e^{-1}\approx 0,4$; $e^{-2}\approx 1,7$; $e\approx 2,7$; $e^{3/2}\approx 4,5$ et $e^2\approx 7,4$.*	(1 pt)

Session 2002 – Problème (12 points)

Soit f la fonction définie sur l'intervalle] -4 ; 2 [par : f(x) = ln(x+4) - ln(2-x).

On note par (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$, d'unité 2 cm.

1	Calculer les limites de f en -4 et en 2. Interpréter graphiquement ces résultats.	(2 pts)
2	a) Montrer que, pour tout x ∈] -4 ; 2 [, la fonction dérivée de f est $f'(x)=\frac{6}{(2-x)(x+4)}$	(1 pt)
	b) Dresser le tableau de variations de f.	(1 pt)
3	a) Déterminer le point d'intersection de (C) avec l'axe des abscisses.	(1 pt)
	b) Écrire l'équation de la tangente (T) à (C) au point I(-1 ; 0)	(1 pt)
	c) Montrer que le point I(-1 ; 0) est un centre de symétrie pour (C).	(1 pt)
4	c) Tracer (T) et (C) dans un même repère.	(2 pts)
5	Soit F la fonction définie sur] -4 ; 2 [par $F(x)=(x+4)(\ln x+4)-(x-2)\ln(2-x)$	
	a) Calculer la fonction dérivée F' de F.	(1 pt)
	b) En déduire la valeur exacte en cm² de l'aire du domaine plan limité par (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations x = -1 et x = 0.	(1 pt)
6	Soit g la fonction définie sur] -4 ; 2 [par $g(x)=\ln(\frac{2-x}{x+4})$	
	a) Montrer que, pour tout x ∈] -4 ; 2 [, g(x) = - f(x).	(0,5 pt)
	Tracer dans le même repère que (C) la courbe représentative (Γ) de g.	(0,5 pt)