Série 1 : Exercices sur le logarithme népérien

Exercice 1 :

Exprimer en fonction de ln(2) et de ln(3) les nombres suivants :

a) $\ln(8)$ b) $\frac{1}{2}\ln(16)$ c) $\ln(\frac{1}{2})$ d) $\frac{1}{2}\ln(\frac{1}{4})$ e) $\ln(\frac{1}{81})$

f) $\ln(12)$ g) $\ln(36)$ h) $\ln(36)-2\ln(3)$ i) $\ln[(-4)^2]$

Exercice 2 :

Comparer les deux nombres suivants :

a) $(\ln(8)-\ln(3))$ et $(\ln(11)-\ln(9))$

b) $(3\ln(5))$ et $(2\ln(11))$

c) $(\ln(7)-\ln(\frac{9}{21}))$ et $(2\ln(5)-\ln(10))$

Exercice 3 :

Les nombres a, b et c sont des réels positifs. Simplifier les expressions suivants :

a) $A=\ln(\frac{a}{b})+\ln(\frac{b}{c})$ b) $B=\ln(\frac{a}{b})-\ln(\frac{c}{b})-\ln(\frac{a}{c})$

c) $C=\ln(a^2)+\ln(\frac{b}{a})$ d) $C=\ln(ab)+\ln(\frac{b}{a})$

Exercice 4 :

Calculer $f(e)$, $f(\frac{1}{x})$, $f(\sqrt{2})$ et $f(1)$ pour les fonctions suivantes :

a) $f_1(x)=(\ln x)^2+\ln(x)$ b) $f_2(x)=\ln(x^2)-(\ln x)^2$ c) $f_3(x)=\ln(2x)-(\ln x)^2$

d) $f_4(x)=x-\ln(x)$ e) $f_5(x)=\frac{x+1}{2+\ln(x)}$ f) $f_6(x)=\frac{\ln(x)}{\ln(x)-3}$

Exercice 5 :

Déterminer le domaine de définition des fonctions suivantes :

a) $f_1(x)=\ln(\frac{1}{x})$ b) $f_2(x)=\ln(x^2)$ c) $f_3(x)=\ln(-x^2+3x)$

d) $f_4(x)=\frac{1}{x}+\ln(x)$ e) $f_5(x)=\ln|x^2-4|$ f) $f_6(x)=\ln(x^2-4)$

g) $f_7(x)=\ln(x-2)+\ln(x+2)$ h) $f_8(x)=\dfrac{1}{1+\ln(x)}$ i) $f_9(x)=\dfrac{1}{\ln(x)}$

j) $f_{10}(x)=\dfrac{\ln(x)}{x}$ k) $f_{11}(x)=\ln\left(\dfrac{x^2-2x}{x^2-1}\right)$ l) $f_{12}(x)=\sqrt{1-x}+\ln(x)$

Exercice 6 :

Résoudre dans IR les équations suivantes :

a) $\ln(x)=1$ b) $\ln(2-x)=0$ c) $\ln(x+2)=\ln(2x-3)$

d) $(x+3)\ln(x+2)=0$ e) $\ln(x^2-4)=\ln(1-4x)$ f) $\ln(x-2)+\ln(x+3)=\ln(9x-21)$

g) $\ln\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)=3$ h) $(\ln x)^2-3\ln(x)-2=0$ i) $\ln(x^2-2e^2)=1+\ln(x)$

j) $\ln(x^2-2x)=\ln(2)+\ln(x^2-x-2)$

Exercice 7 :

On considère le polynôme $P(a)=(a-1)(a+1)(2a-9)$.

1. Développer et ordonner ce polynôme
2. En déduire la résolution de l'équation : $(\ln x)^3-9(\ln x)^2-2\ln x+9=0$.

Exercice 8 :

Résoudre les inéquations suivantes :

a) $\ln(x)>1$ b) $\ln(x)<0$ c) $\ln(2x+e)>1$

d) $\ln(1-3x)\leq 0$ e) $\ln\left(\dfrac{1}{x}\right)>0$ f) $\ln(2x+1)\geq\ln(x+2)$

g) $\ln(3x+2)>\ln(x-1)$ h) $(x-1)\ln(x)<0$ i) $\dfrac{x-2}{\ln(x)}\leq 0$ j) $(\ln x)^2-3\ln(x)+2\leq 0$

Exercice 9 :

Résoudre les systèmes d'équations suivantes :

a) $\begin{cases} 3x+2y=23 \\ \ln(x)+\ln(y)=\ln(7) \end{cases}$ b) $\begin{cases} \ln(xy)=7 \\ \ln\left(\dfrac{x}{y}\right)=1 \end{cases}$

Exercice 10 :

Calculer les limites aux bornes de l'ensemble de définition des fonctions suivantes :

a) $f_1(x)=\ln(2-x)$ b) $f_2(x)=(x-3)\ln(3-x)$ c) $f_3(x)=\ln(x^2-3x+2)$

d) $f_4(x)=\frac{1}{\ln(x)}$ e) $f_5(x)=\ln(\frac{2x+3}{x-1})$ f) $f_6(x)=\frac{2}{\ln(x)-1}$

g) $f_7(x)=x\ln(x)$ h) $f_8(x)=-(\ln x)^2+2\ln(x)+3$

Exercice 11 :

Montrer que la droite donnée est asymptote à la courbe représentative de la fonction correspondante.

a) $f_1(x)=2x-1+\frac{\ln(x)}{x}$, $y_1=2x-1$

b) $f_2(x)=x+\ln(\frac{ex}{x+1})$, $y_2=x+1$

c) $f_3(x)=-x+2+\ln(\frac{2x+1}{x+2})$, $y_3=-x+2+\ln(2)$

Exercice 12 :

Calculer la dérivée des fonctions suivantes :

a) $f_1(x)=\ln(x^2+2x+2)$ b) $f_2(x)=\frac{x\ln(x)+1}{x-1}$ c) $f_3(x)=x\ln(x)$

d) $f_4(x)=\ln[(x-1)^2]$ e) $f_5(x)=x^2+\frac{\ln(x)}{x}$ f) $f_6(x)=(x^2-x)\ln(\frac{1}{x})$

Exercice 13 :

Calculer les primitives des fonctions suivantes :

a) $f_1(x)=\frac{2}{x}$ b) $f_2(x)=\frac{2}{x+1}-\frac{1}{x-2}$ c) $f_3(x)=\frac{3}{x-2}$

d) $f_4(x)=\frac{1}{x^2-1}$ e) $f_5(x)=\frac{x^2+3x-1}{x^2}$ f) $f_6(x)=\frac{x}{(x-1)(x+3)}$

g) $f_7(x)=\frac{2x+1}{x^2+x+1}$

Exercice 14 :

Soit f la fonction de la variable réelle x définie par $f(x)=\frac{3-\ln(x)}{1+\ln(x)}$

1. Quel est l'ensemble de définition de f ?
2. Calculer $f(e^3)$.
3. Résoudre l'équation f(x) = 2.
4. Calculer la dérivée de f et étudier le signe de cette dérivée.

Exercice 15 :

Soit f la fonction définie par $f(x)=\ln(\frac{x+1}{x+2})+\ln(\frac{x+2}{x-1})$

1. Quel est l'ensemble de définition de f ?
2. Pour quelles valeurs de x a-t-on f(x) = 0 ?
3. Calculer la dérivée de f.

Exercice 16 :

On considère la fonction f définie par $f(x)=1+\ln(\frac{x}{e^2})$

1. Étudier la fonction f.
2. Calculer la dérivée de la fonction F définie par $F(x)=x\ln(\frac{x}{e^2})-x$
3. On appelle (C) la courbe représentative de f. Calculer l'aire du domaine compris entre la courbe (C), l'axe x'Ox et les droites d'équations x = e et x = e².

Exercice 17 :

1. Étudier la fonction f définie par $f(x)=2x-\ln(x)$.
2. Tracer la courbe représentative (C) de f dans un repère orthonormé.
3. Calculer la dérivée de la fonction g définie pour tout x > 0 par $g(x)=x-x\ln(x)$. En déduire une primitive de f sur $]0;+\infty[$.
4. Calculer alors l'aire de la portion du plan délimitée par la courbe (C), l'axe x'Ox et les droite d'équations respectives x =1 et x= 4 (on donne ln(2) = 0,69).

Exercice 18 :

On considère la fonction qui, au nombre réel x (x > 0), associe $f(x)=(2+\ln(x))\ln(x)$.

1. Étudier les variations de f et tracer sa courbe représentative dans un repère $(O;\vec{i},\vec{j})$ avec $\|\vec{i}\|=2\text{cm}$ et $\|\vec{j}\|=4\text{ cm}$
2. Former les équations des tangentes à la courbe aux points d'abscisses x = 1 et x = e².
3. Calculer la dérivée de la fonction g définie par $g(x)=x(\ln x)^2$
4. Calculer l'aire du domaine limité par l'axe Ox et l'arc de la courbe représentative de f correspondant aux f(x) positifs.

Exercice 19 :

On considère la fonction f définie par $f(x)=\dfrac{1}{\ln(5-x)}$.

1. Résoudre l'équation $\ln(5-x)=0$.
2. Quel est l'ensemble de définition D de f ?
3. Calculer les limites de f aux bornes de D.
4. Calculer l'expression de la dérivée de f.
5. Donner le tableau de variation de f.
6. Construire la courbe C représentant f dans un repère orthonormé (unité :2cm).

Exercice 20 :

f est la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{\ln(x)}$.

On note C la courbe représentant f dans un repère orthonormé (O, i , j) (unité : 2cm).

1. Résoudre l'équation $\ln(x)=1$.
2. Calculer la dérivée f' de f.

   Étudier le signe de (ln x) - 2 en fonction de x.

   En déduire les variations de f.
3. Déterminer la limite de f en 0.

   Déterminer la limite de f en $+\infty$.
4. Dresser le tableau de variation de f et construire la courbe C en précisant les tangentes aux points d'abscisses 1, e et e².

Exercice 21 :

On considère le fonction f définie par $f(x)=2\ln(1-x)-\ln(5+x)$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Étudier les variations de f.
3. Déterminer les coordonnées du point d'intersection de la courbe C représentant f avec l'axe des abscisses.
4. Donner une équation de la tangente à C au point d'abscisse -1.
5. Construire C et cette tangente.