Série 3 : Exercices sur les fonctions numériques

Exercice 1 :

On considère la fonction f qui, à tout réel x, fait correspondre $f(x)=\dfrac{2x^2-4x+2}{2x+3}$.

Soit (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1. Donner l'ensemble de définition de f.
   Calculer les limites de f aux bornes de cet ensemble.
2. Montrer que f(x) peut se mettre sous la forme $f(x)=ax+b+\dfrac{c}{2x+3}$.
   En déduire que (C) admet une asymptote oblique dont on déterminera une équation cartésienne.
3. Calculer f'(x). Étudier les variations de f.
4. Donner l'équation de la tangente (T) à la courbe (C) en son point d'abscisse +3.
   Quelle est l'ordonnée du point de cette tangente dont l'abscisse est – 3/2 ?
5. Montrer que le point I, intersection des deux asymptotes de la courbe (C), est centre de symétrie pour cette courbe.
6. Tracer la tangente (T) et la courbe (C).
7. Utiliser le graphique pour discuter les racines de l'équation : $2x^2-2(2+p)x-3p+2=0$, p étant un paramètre réel.

Exercice 2 :

Soit f la fonction définie par $f(x)=\dfrac{4x+9}{(2x+3)^2}$.

Soit C sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$, l'unité étant 1 cm.

1. Étudier la fonction f : ensemble de définition, dérivée, sens de variation et limites aux bornes.
   On montrera notamment que $f'(x)=-\dfrac{8(x+3)}{(2x+3)^3}$. Dresser le tableau de variation de f.
2. Déterminer les points d'intersection de la courbe C avec les axes de coordonnées.
3. Donner une équation de la tangente T à la courbe C au point d'abscisse 0, et démontrer que T possède un autre point d'intersection avec C que l'on déterminera.
4. Représenter la courbe C et la tangente T.
5. Déterminer deux réels a et b tels que pour tout , on ait $f(x)=\dfrac{a}{(2x+3)}+\dfrac{b}{(2x+3)^2}$
   En déduire les primitives de f sur $]-\dfrac{3}{2};+\infty[$
6. Calculez l'aire de l'ensemble des points M(x ; y) du plan, tel que $\begin{cases}-1\le x\le 0\\ 0\le y\le f(x)\end{cases}$

Exercice 3 :

Soit f la fonction définie par : $f(x)=\frac{x^2+x+1}{(x-1)^2}$

On appelle C sa représentation graphique dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ d'unité graphique 2cm.

1. Déterminer les réels a, b et c tels que pour tout réel x de E, ensemble de définition de f, on ait :

   $f(x)=a+\frac{b}{x-1}+\frac{c}{(x-1)^2}$

2. Étudier la fonction f et dressez le tableau de variation.
3. Déterminer une équation de la tangente D à C au point A d'abscisse -2.
4. Construire D, puis C avec ses asymptotes.
5. Déterminez l'aire *A*, en cm², de la partie du plan – à marquer sur le schéma - délimitée par C et les trois droites d'équations : y = 1, x = -2 et x = 0.

   On demande la valeur exacte de *A* et une valeur approchée de *A* à 10^{-3} près.