Séquence 7 : Synthèse sur les suites numériques

1. Généralités

- Une suite (u_n) est dite **croissante** si $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - u_n \geq 0$;
- Une suite (u_n) est dite **décroissante** si $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - u_n \leq 0$;
- Une suite (u_n) est dite **monotone** si elle est soit croissante soit décroissante ;
- Une suite (u_n) est dite **majorée** par A si $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq A$;
- Une suite (u_n) est dite **minorée** par B si $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geq B$;
- Une suite (u_n) est dite **périodique** de période p si $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+p} = u_n$;
- Deux suites (u_n) et (v_n) sont dites **adjacentes** si (u_n) est croissante, $v_n)$ est décroissante et $\lim\limits_{n \to +\infty} (v_n - u_n) = 0$

Si deux sont adjacentes, elles convergent vers la même limite l qui vérifie $u_n \leq l \leq v_n$.

Exemple : $u_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots \frac{1}{n!} = \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i!}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{n!} = \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i!} + \frac{1}{n!}$

Ces deux suites sont adjacentes et convergent vers e ≈ 2,7182818…

2. Limites

On dit qu'une suite (u_n) admet pour **limite L** si $\forall \epsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \text{tel que } \forall n \geq n_0,\ |u_n - L| < \epsilon$

Cette définition, qui dépasse le niveau de TA, signifie que tout intervalle ouvert contenant L contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang. Il faut insister : c'est le comportement asymptotique d'une suite qui est intéressant et non les premiers termes.

On dit qu'une suite (u_n) admet pour **limite +∞** si $\forall A > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \text{tel que } \forall n \geq n_0,\ u_n > A$.

Cette définition signifie que tout intervalle de type $]A ; +\infty[$ contient tous les termes de a suite à partir d'un certain rang.

On dit qu'une suite (u_n) admet pour **limite -∞** si $\forall B < 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \text{tel que } \forall n \geq n_0,\ u_n < B$.

Cette définition signifie que tout intervalle de type $]-\infty ; B[$ contient tous les termes de a suite à partir d'un certain rang.

On dit qu'une suite (u_n) **diverge** si elle n'admet pas de limite.

Exemple de suites divergentes :

- La suite $u_n = (-1)^n$ prend uniquement deux valeurs : 1 ;-1;1 ;-1…
- Les valeurs de la suite $v_n = \sin(n)$ remplissent l'intervalle [-1;1]

3. Théorèmes d'existence de limites

- Si une suite (u_n) est croissante et majorée, alors elle converge.
- Si une suite (u_n) est décroissante et minorée, alors elle converge.

En revanche, on ne sait rien de la limite.

4. Théorèmes sur les limites

Composée : Soif f définie sur I. (v_n) est une suite dont tous les termes appartiennent à I.

Si $\lim_{n\to+\infty} v_n = b$ et si $\lim_{x\to b} f(x) = c$, alors $\lim_{n\to+\infty} f(v_n) = c$.

5. Suites arithmétiques

5.1 Définition

Une suite est **arithmétique** si et seulement si elle est définie par récurrence de la manière suivante : u_0 est son premier terme et $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+1} = u_n + a$. a est appelée **raison**.

Pour montrer qu'une suite (u_n) est arithmétique, il faut calculer $u_{n+1} - u_n$ et montrer que cette quantité est une constante, égale à la raison de la suite.

5.2 Propriétés

- $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = u_0 + n \times a$
- $\sum_{i=0}^{n} u_i = u_0 + u_1 + \ldots + u_n = (n+1)u_0 + \frac{n(n+1)}{2} \times a$
- $S = u_k + u_{k+1} + \ldots + u_n = \frac{n-k+1}{2} \times (u_k + u_n)$

5.3 Limites

- Si a = 0, $u_n = \lim_{n\to+\infty} u_n = v_0$
- Si a > 0, $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$
- Si a < 0, $\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty$

6. Suites géométriques

6.1 Définition

Une suite est **géométrique** si et seulement si elle est définie par récurrence de la manière suivante : u_0 est son premier terme et $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+1} = q \times u_n$. q est appelée **raison**.

Pour montrer qu'une suite (u_n) est géométrique, il faut calculer $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ et montrer que cette quantité est une constante, égale à la raison de la suite.

6.2 Propriétés

- $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = u_0 \times q^n$
- Si $q \neq 1$, $\sum_{i=0}^{n} u_i = u_0 \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$
- Si $q \neq 1$, $S = u_k + u_{k+1} + \ldots + u_n = u_k \frac{1-q^{n-k+1}}{1-q}$
- Si $q = 1$, $\sum_{i=0}^{n} u_i = u_0 (n+1)$

6.3 Limites

- Si $|q| < 1$, $\lim_{n \to +\infty} q^n = 0$
- Si $q > 1$, $\lim_{n \to +\infty} q^n = +\infty$
- Si $q < -1$, $\lim_{n \to +\infty} |q^n| = +\infty$

Dans ce dernier cas, on dit que la suite diverge (elle n'admet pas de limite).

7. Principe de récurrence

Soit P une propriété dépendant de n.

S'il existe n_0 tel que $P(n_0)$ soit vraie et si $\forall n \geq n_0, P(n) \Rightarrow P(n+1)$, alors on a $\forall n \geq n_0, P(n)$.

La passage de P(n) à P(n+1) est appelé **l'hérédité**.

Il faut toujours penser à montrer que la propriété est vraie à partir d'un certain rang.

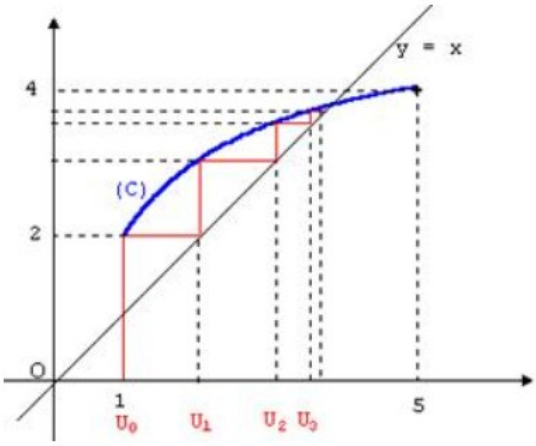
8. Récurrence d'ordre 1

Soit une suite définie de manière récurrente par u_0 et $u_{n+1} = f(u_n)$.

Il faut étudier le sens de variations de f.

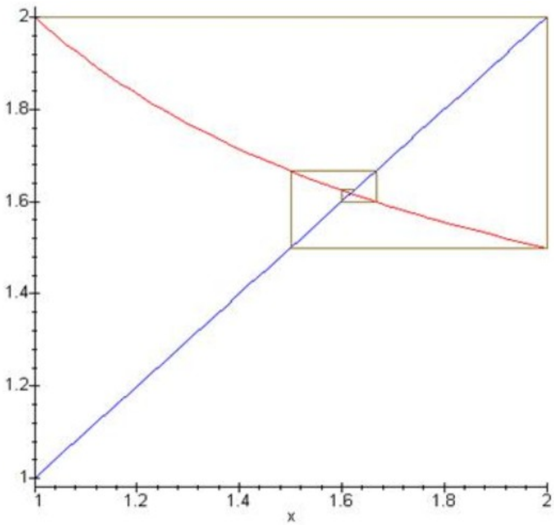
Si f est croissante sur I et si $f(I) \subset I$, alors la suite (u_n) est monotone.

Si de plus, l'équation f(x)=x admet une solution dans I, alors c'est la limite de la suite (u_n).



Dans l'exemple ci-contre, on a tracé la courbe de f et la droite d'équation y=x. Ces deux courbes se coupent en un point d'abscisse inférieure à 4. Si on prend u_0 sur (Ox), le point d'abscisse u_0 de C_f a comme ordonnée $u_1=f(u_0)$. On projette alors ce point sur la droite d'équation y=x puis sur (Ox). On a donc maintenant u_1 sur (Ox).

On réitère le processus et on visualise ainsi u_2, u_3, u_4… On peut avoir l'intuition que la suite converge vers le réel solution de l'équation f(x)=x. Attention, on va voir l'importance du premier terme. Si u_0 est supérieure à 4, il est clair que la suite tend vers l'infini.



Le deuxième graphe ci-contre fournit un exemple avec une fonction décroissante : $f(x)=1+\frac{1}{x}$.

On définit $u_{n+1} = f(u_n)$ et $u_0=1$.

Par une méthode similaire, on parvient alors au tracé et on peut émettre l'hypothèse que la suite u_n converge vers le réel l =1,7.