Séquence 7 : Exemples de suites numériques

1. Suites arithmétiques

1.1 Définition

Une suite (u_n) est **arithmétique** s'il existe un réel r tel que $u_{n+1} = u_n + r$.

Le réel r est appelé la **raison** de la suite.

Une suite arithmétique est entièrement déterminée par son premier terme, sa raison et le nombre de ses termes.

Exemple :

Déterminer la suite arithmétique de premier terme $u_1 = -5$ de raison $r = 2$ et comprenant 6 termes.

1.2 Propriétés

- La différence de 2 termes consécutifs d'une suite arithmétique est constante : $u_{n+1} - u_n = r$;
- Pour tout entier n, on a $u_n = u_0 + n \times r$;
- Pour n et k entiers, $u_n = u_k + (n-k) \times r$;
- Somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique :

$$S = \frac{\text{Nombre de termes}}{2} \times (1^{\text{er}} \text{ terme de la somme} + \text{dernier terme de la somme})$$

avec $\text{Nombre de termes} = \text{Indice du } 1^{\text{er}} \text{ terme de la somme} - \text{Indice du dernier terme de la somme} + 1$

Exemple : $S = u_k + u_{k+1} + \ldots + u_n = \dfrac{n-k+1}{2} \times (u_k + u_n)$

- Toute suite arithmétique de raison $r > 0$ est croissante ;
- Toute suite arithmétique de raison $r < 0$ est décroissante ;
- Toute suite arithmétique de raison $r = 0$ est constante ou stationnaire.

2. Suites géométriques

2.1 Définition

Une suite (u_n) est **géométrique** s'il existe un réel q tel que $u_{n+1} = q\, u_n$.

Le réel q est appelé la **raison** de la suite.

Une suite géométrique est entièrement déterminée par son premier terme, sa raison et le nombre de ses termes.

Exemple :

Déterminer la suite géométrique (u_n) de premier terme $u_1=3$, de raison q = 2 et comprenant 4 termes.

2.2 Propriétés

- Le rapport de 2 termes consécutifs d'une suite géométrique est constante : $\frac{u_{n+1}}{u_n}=q$;
- Pour tout entier n, on a $u_n=u_0\times q^n$;
- Pour n et k entiers, $u_n=u_k\times q^{n-k}$ **;**
- Somme de termes consécutifs d'une suite géométrique :

$$S=(1^{er}\text{terme de la somme})\frac{1-q^{\text{Nbre de termes}}}{1-q}$$

Exemple : $S=u_k+u_{k+1}+...+u_n=u_k\frac{1-q^{n-k+1}}{1-q}$

- Toute suite géométrique de raison q = 1 est constante ou stationnaire.
- Toute suite géométrique de raison q = -1 est divergente.
- Toute suite géométrique de raison |q| > 1 est divergente.
- Toute suite géométrique de raison 0 < |q| < 1 converge vers 0.