Séquence 5 : Fonction exponentielle népérienne

1. Théorème et définition

1.1 Théorèmes

- Toute fonction f monotone sur un intervalle I sur l'intervalle J admet une fonction réciproque, notée f^{-1}, de J sur I. À tout réel y de J, elle associe l'unique x de I solution de l'équation f(x) = y.
- f et f^{-1} ont le même sens de variation.

1.2 Définition

La fonction ln est strictement croissante de $]0;+\infty[$ sur IR. Elle admet une réciproque définie sur IR , appelée **fonction exponentielle** et notée exp :

$y=\exp(x) \Leftrightarrow x=\ln(y)$ avec $x \in \mathbb{R}$ et $y \in]0;+\infty[$.

Notation : Pour des raisons qui seront données ultérieurement, on note **exp(x) = e^x**.

2. Conséquences de la définition

- $\begin{cases} y=e^x \\ x \in \mathbb{R} \end{cases}$ si et seulement si $\begin{cases} x=\ln(y) \\ y \in]0;+\infty[\end{cases}$
- $\ln(e^x) = x$, pour tout réel x
- $e^{\ln(x)} = x$, pour tout réel x > 0
- $e^0=1$

3. Sens de variation

Les fonctions $x \longmapsto \ln(x)$ et $x \longmapsto e^x$ ont le même sens de variation.

Soient deux réels x_1 et x_2 tels que $x_1 < x_2$. Nous avons donc, $\ln(e^{x_1})<\ln(e^{x_2})$ alors $e^{x_1}<e^{x_2}$.

En conséquent, pour tous réels a et b :

- $a < b$ si et seulement si $e^a < e^b$
- $a > 0$ si et seulement si $e^a > 1$
- $a < 0$ si et seulement si $0 < e^a < 1$
- $a = b$ si et seulement si $e^a = e^b$

4. Propriétés et théorèmes

4.1 Propriété fondamentale

Pour tous réels a et b, $e^{a+b} = e^a.e^b$

x_1 et x_2 sont deux réels. Notons y_1 et y_2 leurs images par la fonction exp : $y_1 = e^{x_1}$ et $y_2 = e^{x_2}$.

On a alors $x_1 = \ln y_1$ et $x_2 = \ln y_2$. D'après la propriété de ln, $x_1 + x_2 = \ln(y_1) + \ln(y_2) = \ln(y_1.y_2)$.

d'où $e^{x_1+x_2} = e^{x_1} \times e^{x_2}$

Exemple: $e^{3+\ln(2)} = e^3.e^{\ln(2)} = 2e^3$

4.2 Théorèmes

- $e^{-a} = \dfrac{1}{e^a}$
- $e^{a-b} = \dfrac{e^a}{e^b}$
- $(e^a)^n = e^{na}$

Remarque : ces propriétés sont analogues à celles des puissances, ce qui justifie la notation e^x.

5. Étude de la fonction exp

Domaine de définition :

La fonction exp est définie sur IR.

Limites :

$\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$

Nous admettrons les limites suivantes : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$, $\lim\limits_{x \to -\infty} x\, e^x = 0$ et $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$.

Dérivée :

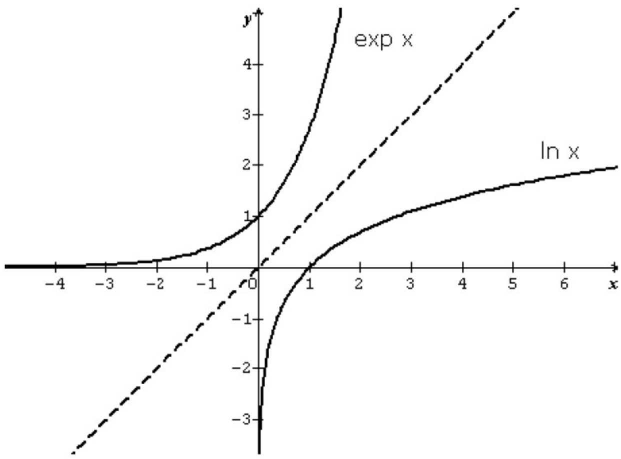
Nous admettrons que la fonction exponentielle est dérivable sur IR. Déterminons alors $e'^{(x)}$.

Pour tout réel x, $\ln(e^x) = x$. En utilisant le théorème de la dérivation d'une fonction composée, nous avons : $(\ln(e^x))' = \ln'(e^x) \times (e^x)' = \dfrac{e^x}{(e^x)'}$ et $(\ln(e^x))' = (x)' = 1$.

D'où pour tout x réel : **$(e^x)' = e^x$**

Tableau de variation :

x	$-\infty$		$+\infty$
$(e^x)'$		+	
e^x	0	↗	$+\infty$



Dans un repère orthonormé, les courbes de ln et de exp sont symétriques par à la droite d'équation y = x.

6. Résolution de l'équation $e^x = m$ (m réel donné)

Par définition, $e^x > 0$ pour tout réel x.

- Pour $m \leq 0$, l'équation $e^x = m$ n'a pas de solution.
- Pour $m > 0$, $e^x = m$ si et seulement si $x = \ln(m)$. Cette solution est unique.

Exemple :
Résoudre dans IR l'équation $e^x = 5$.

Remarque sur la résolution d'une inéquation :
La fonction exp étant croissante pour tout x de IR, alors $e^x > m$ $(m > 0)$ si et seulement $x > \ln(m)$.

Exemple :
Résoudre dans IR,l'inéquation $e^x > 2$.

7. Fonctions $x \longmapsto e^{u(x)}$ où u est une fonction

$e^{u(x)}$ est définie lorsque u(x) est définie.

Exemples :

- la fonction e^{x^2-2x+2} est définie sur IR.
- la fonction $e^{\frac{x+2}{x-1}}$ est définie sur IR - {1}.

La résolution de l'équation $e^{u(x)} = m$ est analogue à celle de $e^x = m$.
Il en est de même pour l'inéquation $e^{u(x)} > m$.

La dérivée de $e^{u(x)}$ est $(e^{u(x)})' = u'(x).e^{u(x)}$

Exemple :

Calculer la dérivée de $x \to f(x)=e^{x^2-3x+2}$.

Posons $u(x) = x^2 - 3x + 2$. On a $u'(x) = 2x - 3$. Donc $f'(x)=(2x-3)e^{x^2-3x+2}$.

8. Primitives

Par lecture inverse du tableau de la dérivée, on a :

fonction $x \longmapsto f(x)$	primitives $x \longmapsto F(x)$
e^x	$e^x + k$
e^{ax}	$\frac{1}{a} e^{ax} + k$
$u' e^u$	$e^u + k$