Séquence 3 : Primitives

1. Définition et exemples

f et F sont deux fonctions définies sur un intervalle I. Dire que F est une **primitive** de f sur I signifie que F est dérivable sur I et que pour tout x de I, F'(x) = f(x).

Exemples :

- la fonction F : $x \longmapsto 2x+1$ est une primitive sur IR de f : $x \longmapsto 2$
- la fonction F : $x \longmapsto x^3$ est une primitive sur IR de f : $x \longmapsto 3\,x^2$

2. Ensemble des primitives d'une fonction sur un intervalle I

Soit F une primitive sur I d'une fonction f

Pour tout réel k, la fonction G définie sur I par G(x) = F(x) + k, est dérivable sur I, et G'(x) = F'(x) ; or F'(x) = f(x). Donc G est une primitive de f.

Réciproquement, si F et G sont deux primitives de f sur I, alors F et G sont dérivables sur I et F' =G'= f, d'où F'-G' = 0.

La dérivée de la fonction F - G est la fonction nulle. En conséquent, F - G est une fonction constante sur I et il existe un réel k tel que G(x) = F(x) + k.

f est une fonction définie sur un intervalle I.

S'il existe une primitive F de f sur I, alors,pour toute autre primitive G de f, il existe un réel k tel que G(x) = F(x) + k, pour tout x de I.

Si f admet une primitive sur I, alors elle en admet une infinité.

Soient $x_0 \in$ I et y_0 un réel donné. Si F est une primitive de f sur I, alors il existe **une unique primitive** G de f sur I telle que $G(x_0) = y_0$.

C'est la fonction G telle que $G(x) = F(x) - F(x_0) + y_0$.

Toute fonction f définie et continue sur un intervalle I y admet une primitive.

3. Détermination des primitives

3.1 Primitives des fonctions usuelles

La lecture "inverse" du tableau des dérivées donne :

Fonction $x \longmapsto f(x)$	Fonction $x \longmapsto F(x)$	Intervalle I
$a,\ a \in \mathbb{R}$	$ax+k$	$\mathbb{R}$
x	$\frac{x^2}{2}+k$	$\mathbb{R}$
$x^n,\ n \in \mathbb{N}$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}+k$	$\mathbb{R}$
$x^r,\ r \in \mathbb{Q}-\{-1\}$	$\frac{x^{r+1}}{r+1}+k$	$]0;+\infty[$
$\frac{1}{x^2}$	$-\frac{1}{x}+k$	$]0;+\infty[$

3.2 Recherche de primitives : exemples

Pour la recherche des primitives nous utiliserons les propriétés suivantes :

- F et G sont des primitives respectives des fonctions f et g sur I. Alors F+G est une primitive de f+g sur I.
- F est une primitive de f sur I et λ est un réel. Alors λF est une primitive de λf sur I.

Soit f une fonction polynôme. Pour trouver une primitive de f, il suffit de trouver une primitive de chacun de ses monômes et de faire la somme de ces primitives.

Exemple : Soit f : $x \longmapsto 3x^2 + 7x - 4$.

Une primitive de $x \longmapsto 3x^2$ est $x \longmapsto x^3$, une primitive de $x \longmapsto 7x$ est $x \to 7\frac{x^2}{2}$ et enfin, une primitive de $x \longmapsto 4$ est $x \longmapsto 4x$.

Donc, une primitive de f est la fonction $F : x \to 3x^3+7\frac{x^2}{2}+4x$

u est une fonction dérivable sur un intervalle I et u' est sa fonction dérivée.

Alors $\frac{1}{2}u^2$ est une primitive de u'.u sur I.

De même, $\frac{1}{n+1}u^{n+1}$ est une primitive de $u'.u^n$ sur I ($n \in \mathbb{N}^*$).

Exemple : f est la fonction définie sur IR par $f(x) = (2x + 3)^5$.

f est continue sur IR donc f admet une primitive sur IR.

Notons u la fonction définie par $u(x) = 2x + 3$. Elle est dérivable sur IR, et pour tout réel x, on a $u'(x) = 2$.

Donc, $f=\frac{1}{2}u'u^5$ Or, une primitive, sur IR, de $u'.u^5$ est $\frac{1}{6}u^6$.

D'où, une primitive de f sur IR est $F: x \rightarrow \frac{1}{12} 2x+3^6$.

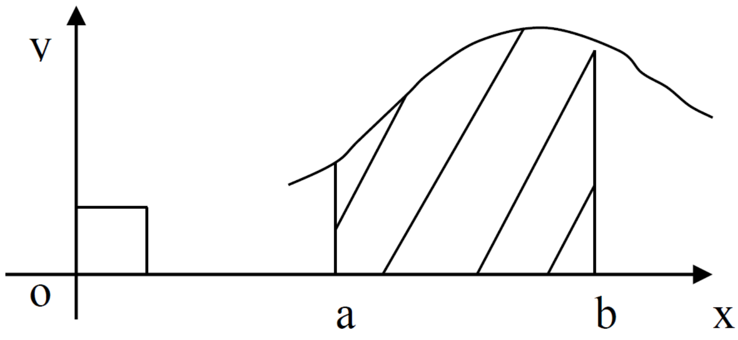
4. Applications aux calculs d'aires

4.1 Définition

f est une fonction continue sur [a ; b] et elle y garde un signe constant. (C) est sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Soit F une primitive de f sur [a ; b].

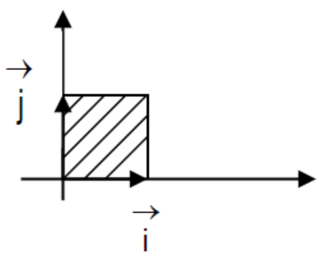
L'**aire géométrique** A du domaine Δ limité par la courbe (C) de f, l'axe des abscisses, les droites d'équations x = a et x = b avec a < b est : A =[F(b) – F(a)] x (unités d'aires)

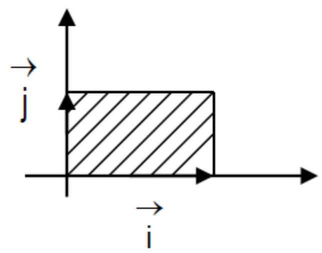
L'**unité d'aire** est l'aire du rectangle de côtés $\|\vec{i}\|$ et $\|\vec{j}\|$.



4.2 Remarques

- unités d'aire :





- Lorsque f est alternativement positive et négative, on subdivise [a ; b] en intervalles où f garde un signe constant et on fait la somme des valeurs absolues des aires algébriques.

Méthode

Pour calculer l'aire du domaine Δ limité par la courbe (C) de f, l'axe des abscisses et les droites d'équations x = a et x = b avec a < b,

- On commence par déterminer une primitive de f sur [a ; b]. Soit F cette primitive.
- L'aire cherchée est A = F(b) - F(a) que l'on multiplie par l'unité d'aire.

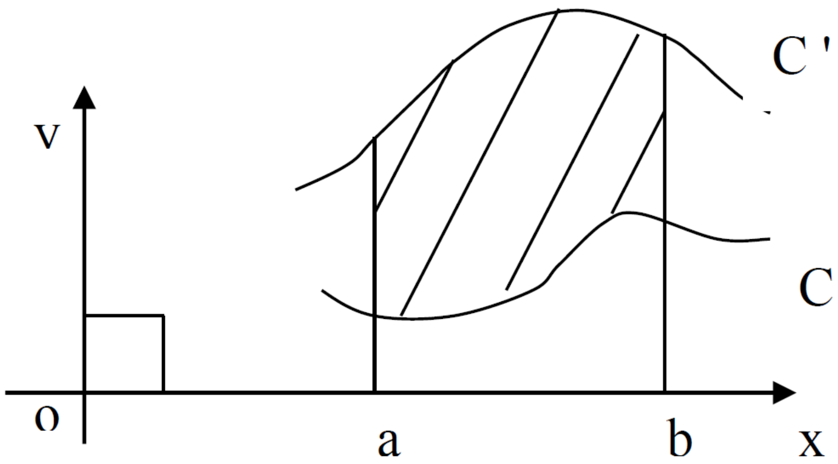
Aire limitée par deux courbes

Soient f et g deux fonctions continues sur [a ; b] telles que f ≤ g sur [a ; b]. Notons respectivement (C) et (C') leurs courbes représentatives dans le repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Soient F et G des primitives respectives de f et g sur [a ; b].

L'**aire du domaine** Δ limité par les courbes (C) et (C'), les droites d'équations x = a et x = b est :

A = $\left[F(x)G(x)\right]_a^b$.(unités d'aire).



Exemple : Dans un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$, construire la courbe de f : x ⟼ x^2+2x+3

- Trouvez une primitive de f sur] 0 , +∞ [.

- Exprimez, en cm^2, l'aire A du domaine limité par C, les droites d'équations y = 0, x = 1 et x = 2