Sujet bac D :correction détaillée

Rappel énoncé:partie I

Dans ce problème on négligera tous les frottements et l'action de l'air. On prendra $||\vec{g}|| = 10\ m.s^{-2}$ et $\pi^2 = 10$.
Les deux parties I et II sont indépendantes.

Partie I (3 pts)

Une petite sphère S, ponctuelle de masse m = 200g est accrochée à un fil souple, de masse négligeable, inextensible, de longueur $\ell = 1m$. L'autre extrémité du fil est attachée à un point fixe.

1°) On écarte S de la position d'équilibre ; le fil tendu fait un angle $\alpha = 60°$ avec la verticale. On lâche la sphère sans vitesse initiale (voir figure 2). En appliquant le théorème de l'énergie cinétique, calculer la vitesse de S au passage à la position d'équilibre. **(1,0 pt)**

2°) L'ensemble { fil + S } tourne à la vitesse angulaire ω constante autour d'un axe vertical (Δ). Le fil fait alors un angle constant $\theta = 30°$ avec la verticale (Voir figure 3).

a – En appliquant le théorème du centre d'inertie (T.C.I), trouver une relation entre l'angle θ et la vitesse angulaire ω. Calculer ω. **(1,0 pt)**

b – Exprimer et calculer la tension du fil. **(1,0 pt)**

correction partie 1

1°-Appliquons le théorème de l'énergie cinétique entre O_1 et O_2 (voir fig 2)

Effectuons d'abord le bilan des forces appliquées à la sphère S.

$\vec{P} = m.\vec{g}$ le poids de la sphère.

$\vec{T}$: force de tension exercée par le fil.

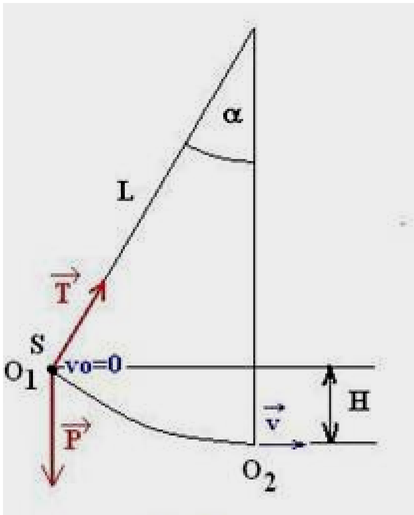


Fig 2

La variation de l'énergie cinétique de la sphère entre O_1 et O_2 est égale à la somme des travaux des forces appliquées sur elle pendant cette variation. Soit:

$$\Delta E_c = W(\vec{P})(O_1 \to O_2) + W(\vec{T})(O_1 \to O_2) \quad (1)$$

La force $\vec{T}$ étant orthogonale au déplacement , son travail est nul.

Etat initial : sphère en O_1, la vitesse est $v_o=0$

Etat final : sphère en O_2, la vitesse (que l'on cherche) est v.

Désignons par H, la hauteur entre O_1 et O_2.

La relation (1) s'écrit :

$$\frac{1}{2} m.v^2 - 0 = m.g.H = m.g.(L - L\cos\alpha) = m.g.L(1-\cos\alpha)$$

$v = \sqrt{2.g.L(1-\cos\alpha)} = \sqrt{2.10.1.(1-0,5)}$ **$=3,3 ms^{-1}$**.

2°/ -a **Relation entre θ et ω:**

Complétons le dessin de la fig 3.
Choisissons un repère orthogonal lié au mobile S:(repère de Frénet)
-l'un des axes est tangent à la trajectoire circulaire de S.
-l'autre est normal à la trajectoire (noté Sx)
(ces 2 axes sont représentés en vue de dessus)
-le troisième axe est vertical (noté Sy)
Le point S est animé d'un mouvement circulaire et uniforme de rayon r=L.sinθ.
Son accélération est centripète et a pour expression :

$$\vec{a}=\frac{v^2}{r}.\vec{n}=\omega^2 r.\vec{n}=\omega^2 L.\sin\theta.\vec{n}$$

Appliquons le théorème du centre d'inertie au point S :

$$\vec{P}+\vec{T}=m.\vec{a}$$

Projetons cette relation sur les 2 axes Sx et Sy :

sur Sy : $T.\cos\theta-P=0$ (1)

sur Sx : $T.\sin\theta=m.L.\omega^2.\sin\theta$ (2)

De l'égalité (1), nous tirons: $T=\frac{m.g}{\cos\theta}$

De l'égalité (2):

$$\omega^2=\frac{T}{m.L}=\frac{m.g}{\cos\theta.m.L}=\frac{g}{\cos\theta.L}$$

soit:

$$\omega=\sqrt{\frac{g}{L.\cos\theta}}=\sqrt{\frac{10.2}{1.\sqrt{3}}}=3{,}4\,rad.s-1.$$

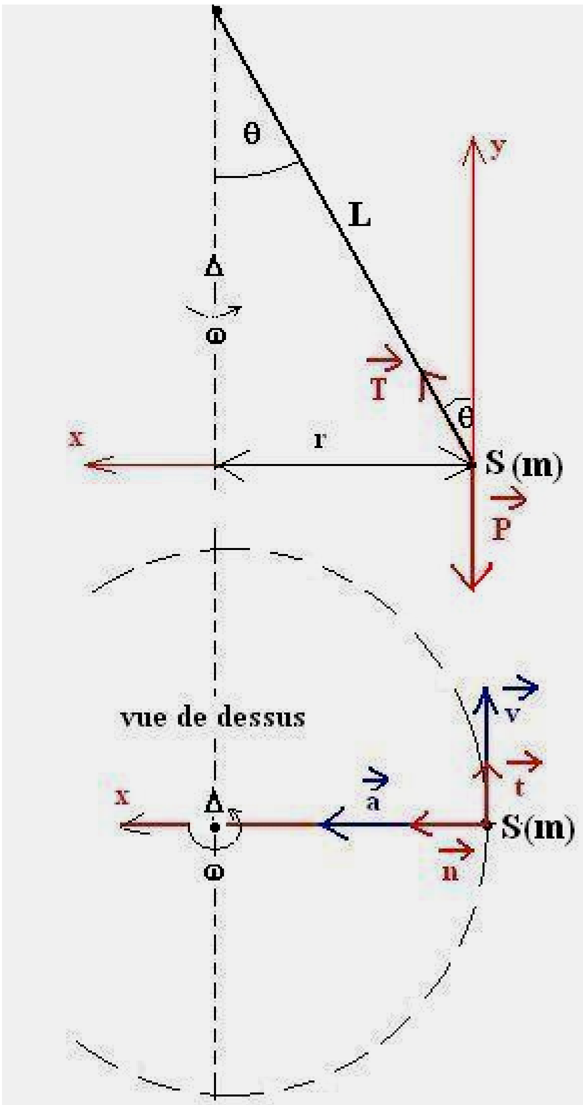


FIG 3

b -**Tension du fil**:

$$T=\frac{m.g}{\cos\theta}=\frac{0{,}2.10.2}{\sqrt{3}}=2{,}3\,N$$

Rappel énoncé:partie II

Partie II (3 pts)

On dispose d'une tige homogène OA, de section constante, de longueur 2ℓ, de masse $M = 3m$. La tige est mobile autour d'un axe horizontal(Δ) passant par O. A l'extrémité A est fixé un solide ponctuel S de masse m. Les frottements de la tige sur l'axe, en O, sont supposés négligeables (Voir figure 4).

1°) Déterminer la distance OG en fonction de ℓ .G est le centre d'inertie du système. (1,0 pt)

2°) Montrer que le moment d'inertie de ce système par rapport à (Δ) est $J_\Delta = 8\,m\ell^2$. (0,5 pt)

3°) On écarte ce pendule composé d'un angle petit α_0 de sa position d'équilibre verticale, puis on l'abandonne sans vitesse.

a – Etablir l'équation différentielle du mouvement. (1,0 pt)

b – Calculer la longueur ℓ_1 du pendule simple synchrone de ce pendule composé. (0,5 pt)

__AN__ : $\ell = 30$ cm

1-distance OG:

Appelons C le centre de la barre de masse 3m et G le centre d'inertie du système {barre-solide ponctuel S}.

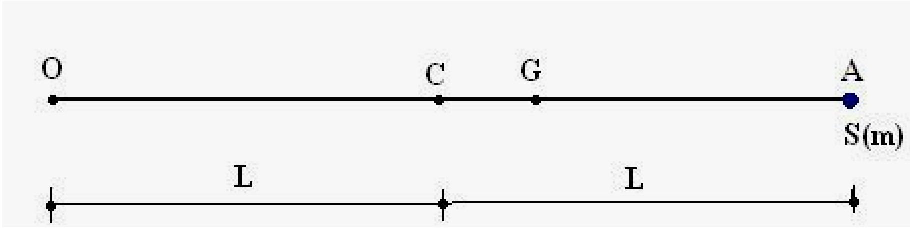


Fig 4

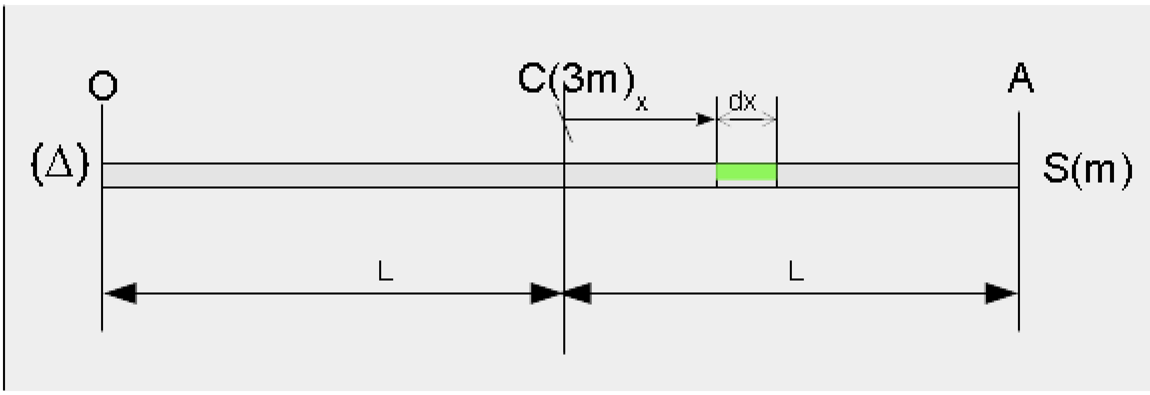
G est barycentre de C(3m) et A(m), par conséquent :

$$\overrightarrow{OG} = \frac{3m.\overrightarrow{OC} + m.\overrightarrow{OA}}{4m}$$

Les vecteurs étant colinéaires, cette relation s'écrit :

$$\boxed{OG = \frac{3m.L + m.2L}{4m} = \frac{5L}{4}}$$

2.moment d'inertie du système par rapport à un axe Δ horizontal passant par O.



Le moment d'inertie total est égal à la somme des moments d'inertie des différentes parties du système.

$J_\Delta(\text{total}) = J_\Delta(\text{barre OA}) + J_\Delta(\text{sphère S})$. La sphère étant considérée ponctuelle,

$J_\Delta(S) = m.(2L)^2 = 4.m.L^2$ Appliquons maintenant le théorème de Huyghens,

Le moment d'inertie de la barre par rapport à Δ est égal au moment d'inertie de la barre par rapport à C plus le moment d'inertie par rapport à Δ de la barre concentrée en C, ce qui s'écrit :

$$J_\Delta(\text{barre OA}) = J_C(\text{barre OA}) + 3.m.L^2$$

Une intégration est nécessaire pour calculer J_C (barre OA).

Soit dx un élément de la barre situé à distance x de C. Soit ρ la masse linéaire de la barre.

La masse de l'élément est donc: ρ.dx ; le moment d'inertie de cet élément par rapport à C est :

$$J_C = \int_{-L}^{L} x^2 \rho\, dx = \rho\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-L}^{L} = 2.\rho.\frac{L^3}{3} = 2.\rho.L.\frac{L^2}{3} = 3m.\frac{L^2}{3} = m.L^2$$

et donc : J_Δ(barre OA)$=mL^2+3mL^2= 4mL^2$. Et, $J_D(\text{total})=4mL^2+4mL^2=8m.L^2$.

3-a-équation différentielle du mouvement du pendule ;

Appliquons le théorème de l'accélération angulaire au pendule composé de masse totale 4m.

$$\sum M(\vec{F}_{ext}/O)=J_{\Delta}.\ddot{\alpha}$$

Le poids tend à limiter l'écart angulaire, le moment du poids et l'angle α sont de signes contraires, soit:

$$-4m.g.OG.\sin\alpha=J_{\Delta}.\ddot{\alpha}$$

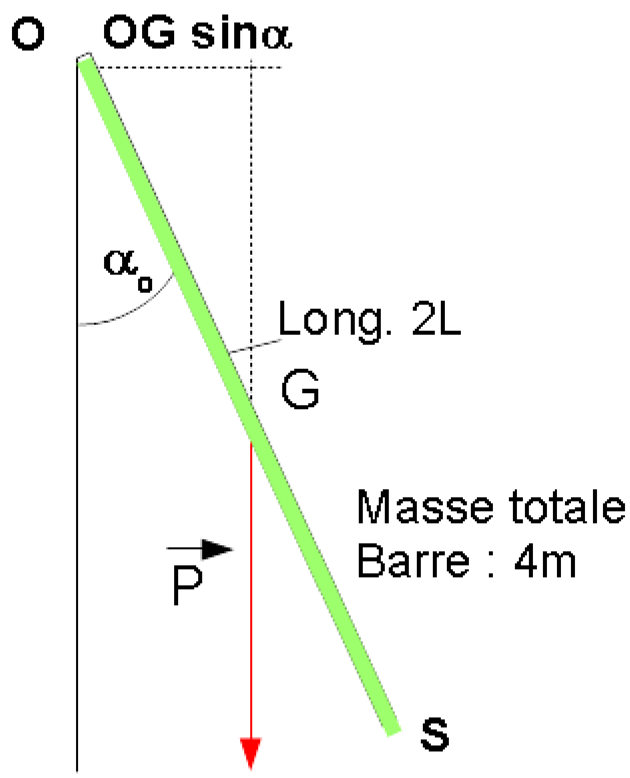
L'écart angulaire restant faible, $\sin\alpha\simeq\alpha$

$$-4m.g.\frac{5L}{4}\alpha=8mL^2.\ddot{\alpha}$$

$$\ddot{\alpha}-\frac{5g}{8L}\alpha=0.$$

équation d'un oscillateur harmonique de pulsation

$$\omega=\sqrt{\frac{5g}{8L}}$$



3-b-Longueur du pendule simple synchrone

Sa longueur L_1 doit vérifier :

$$T=2\pi\sqrt{\frac{L_1}{g}}=2\pi\sqrt{\frac{8L}{5g}}\Rightarrow L_1=8.\frac{L}{5}=\frac{8.30}{5}=48\,cm$$