(1-bis) Solutions détaillées

1. Équilibre d'une potence (**)

rappel énoncé

Un système de suspension ABCDEF (potence) schématisé sur la figure à gauche porte une charge de poids $\vec{P}$ ($\|\vec{P}\|=2000\,N$). On néglige le poids des barres devant celui de la charge.

Les dimensions sont les suivantes :AB=CD=EF=a et BC=CE=2a

Le montant AD repose en A sur une articulation.Il s'appuie en D par un guidage sans frottements . Les articulations B,C,E sont également sans frottements.

On demande d'évaluer les <u>caractéristiques</u> des forces $\vec{R}_D$ **et** $\vec{R}_A$ qui s'exercent sur le système en D et en A sur la barre AD pour assurer l'équilibre de la potence chargée.

Solutions :

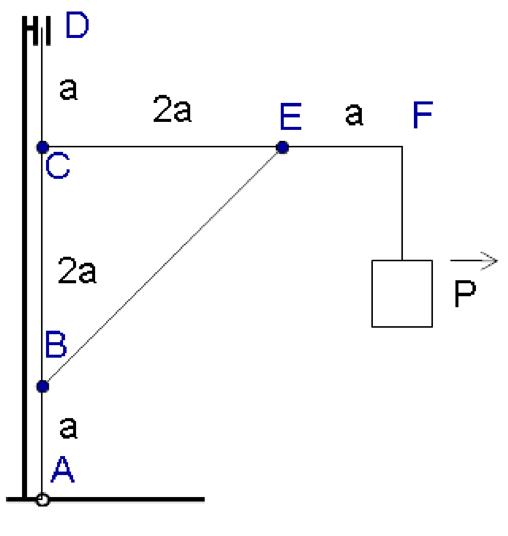


Fig 1 schéma de l'énoncé

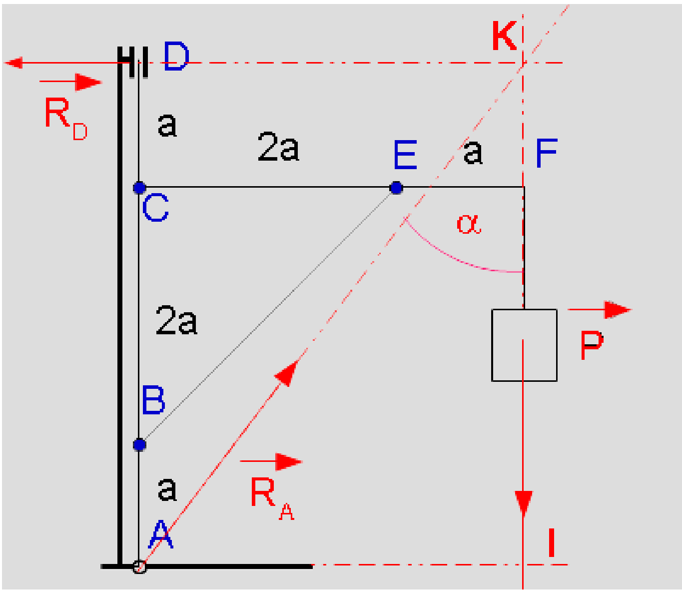
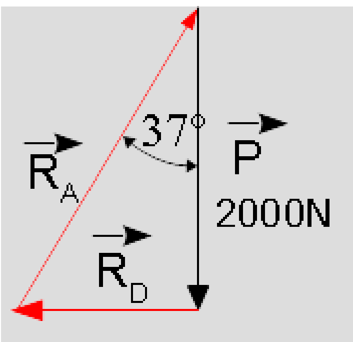


Fig 2 tracés des directions des forces

Les directions de $\vec{P}$ (verticale) et de $\vec{R}_D$ (horizontale) se coupent en K . Les directions des forces étant concourantes, la droite d'action de $\vec{R}_A$ passe aussi par K . Ceci permet d'évaluer l'angle α entre la direction de . $\vec{R}_A$ et la verticale.

$$\alpha=\arctan\left(\frac{AI}{KI}\right)=\arctan\left(\frac{3a}{4a}\right)=37°$$



A partir d'un point origine, tracer le vecteur force $\vec{P}$ dont les caractéristiques sont toutes connues. Tracer la direction de $\vec{R}_D$ horizontale passant par l'extrémité de $\vec{P}$ Tracer la direction de $\vec{R}_A$ inclinée de 37° et passant par l'origine de $\vec{P}$. Le point d'intersection des deux directions précédentes donne le point de fermeture du triangle des forces placées bout à bout. Un choix d'échelle permet d'obtenir les intensités graphiquement.

Par le calcul : $\|\vec{R}_D\|=\|\vec{P}\|\times\tan(\alpha)=\frac{2000\times 3}{4}=1500\,N$

$$\|\vec{R}_A\|=\frac{\|\vec{P}\|}{\cos\alpha}=\frac{2000}{\cos 37°}=2500\,N$$

Autre méthode de détermination des caractéristiques des forces :

Commençons par repérer la potence dans un système d'axes rectangulaire **Axy.**(voir fig. ci-dessous) Orientons positivement les rotations dans le sens trigonométrique . (Ce choix purement conventionnel est nécessaire pour le calcul des moments de forces qui sont des grandeurs algébriques)

La potence étant en équilibre, les 3 équations suivantes doivent être satisfaites :

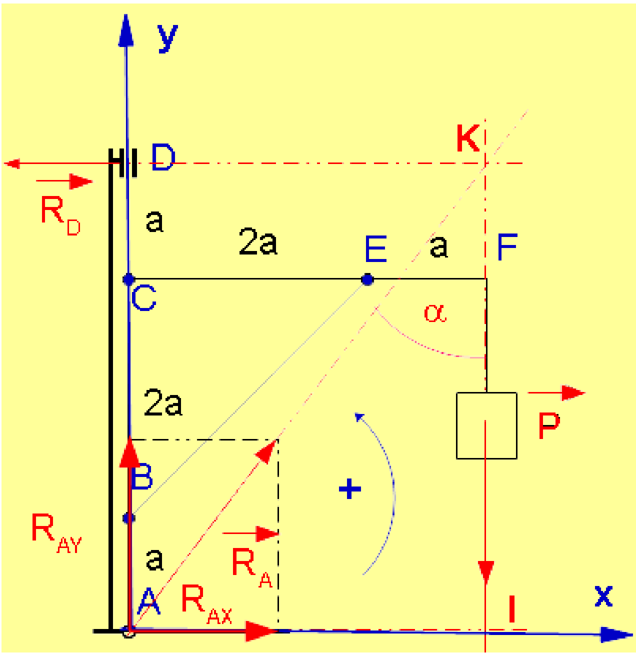
(1)La somme des projections des forces sur Ax doit être nulle .

(2)La somme des projections des forces sur Ay doit être nulle.

(3)La somme algébrique des moments des forces en un point quelconque du système doit être nulle.

Ces 3 conditions constituent le Principe Fondamental de la Statique (**P.F.S**)

Appliquons ces relations pour calculer les forces :



Écrivons l'équation (3)au point A pour obtenir R_D :

$$M_A(\vec{R_D})+M_A(\vec{P})+M_A(\vec{R_A})=0 \quad (3)$$

La direction de la force $\vec{R_A}$ passant par A , son moment est nul. :la relation (3)devient :

$$(R_D x 4a)-Px3a=0 \quad \text{(voir remarque *)}$$

4a et 3a sont souvent appelés :les « bras de leviers » des forces autour de A

D'où : $R_D=P.\frac{3a}{4a}=2000x\frac{3}{4}=1500N$

Équation(1) :

$R_Ax+R_D=0$, soit : $R_{AX}=-R_D=-1500N$

Équation (2) :

$R_{AY}-\|\vec{P}\|=0$ soit : $R_{AY}=\|\vec{P}\|=2000N$

intensité de $\vec{R_A}$:

$$\|\vec{R_A}\|=\sqrt{2000^2+1500^2}=2500N$$

direction de $\vec{R_A}$:

$$\arctan(\frac{R_{AX}}{R_{AY}})=\arctan(\frac{1500}{2000})=37°$$

(*)Signe des moments :

$\vec{R_D}$ tend à faire tourner le système autour de A dans le sens + : son moment en A est positif.

Au contraire, $\vec{P}$ tend à le faire tourner dans le sens -, son moment en A est négatif.

$\vec{R_A}$ ne fait pas tourner le système , son bras de levier est nul.

2. véhicule sur un plan incliné(*)

Un véhicule de poids $\vec{\mathbf{P}}\ (\|\vec{\mathbf{P}}\|=12000\,\mathbf{N})$ descend , moteur coupé, une côte de 3 % (il s'abaisse de 3 mètres pour un parcours de 100m).

Déterminer le module de la force de frottements $\vec{\mathbf{f}}$, de direction parallèle à la route, <u>pour que le véhicule descende la pente avec une vitesse uniforme</u>

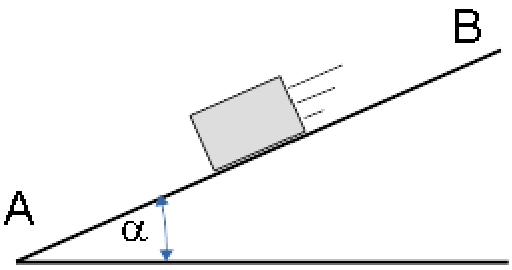


schéma initial

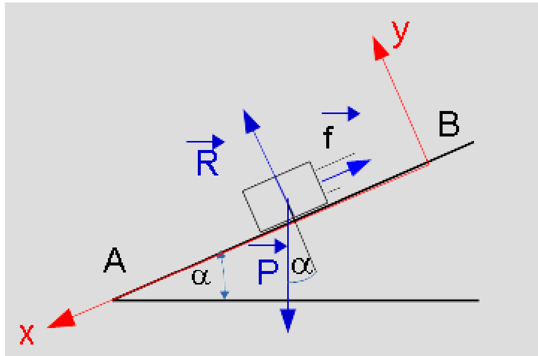


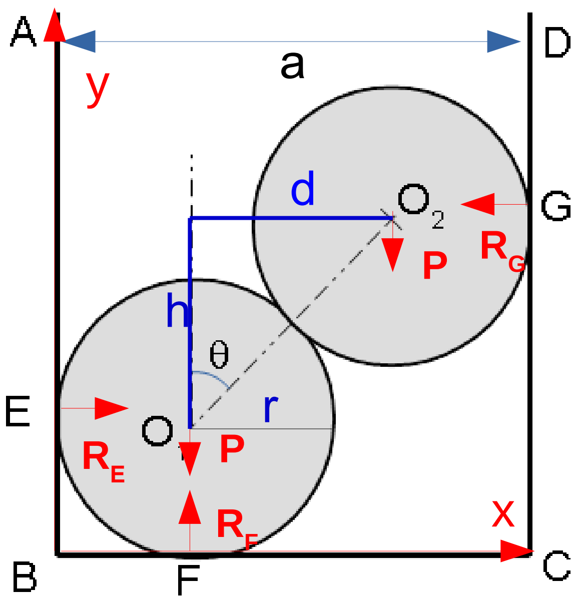
schéma complété des forces

La vitesse étant supposée constante, le système est pseudo-isolé, c'est à dire que la somme vectorielle des forces est nulle. $\vec{P}+\vec{f}+\vec{R}=\vec{0}$. Projetons cette relation sur l'axe Bx : il vient :**P.sinα -f =0**

Le véhicule s'abaisse de 3 mètres pour un parcours de 100m et donc sinα =0,03.d'où : <u>**f =12000x0,03=360N**</u>

3. Cylindres en équilibre dans une rainure (**)

Une rainure de section droite ABCD de largeur « a » a son fond BC horizontal , ses cotés AB et CD verticaux. Dans cette section droite sont placés deux cylindres identiques de poids $\vec{P}$ $(\|\vec{P}\|=100\,N)$, de diamètre 2r avec la condition : 2r<a<4r.
Le disque de bas touche le coté vertical AB en E, le fond en F, celui du haut touche le coté vertical en G.
Déterminer les réactions en E, en F et en G sachant que les contacts se font sans frottements.
On désigne par θ l'angle aigu de la ligne O_1O_2 des centres des 2 cylindres avec la verticale ascendante:θ=60°.



Il y a 3 inconnues à déterminer, il faudra 3 équations relatives aux axes Bx et By traduisant l'équilibre

$$\vec{R}_E+\vec{R}_G+\vec{R}_F+2\vec{P}=\vec{0}$$

(1)Proj. sur Bx : $\|\vec{R}_E\|.\vec{i}-\|\vec{R}_G\|.\vec{i}=\vec{0}$ soit $\mathbf{R_E=R_G}$

(2)Proj. sur By : $\|\vec{R}_F\|.\vec{j}-\|2\vec{P}\|.\vec{j}=\vec{0}$ soit:$\mathbf{R_F=2P}$ **=200N**

écrivons que la somme des moments en E doit être nulle **:**

(3) $+R_F.r$ - P.r – P(d+ r)$+R_G.h=0$ soit : $-P.d+R_G.h=0$

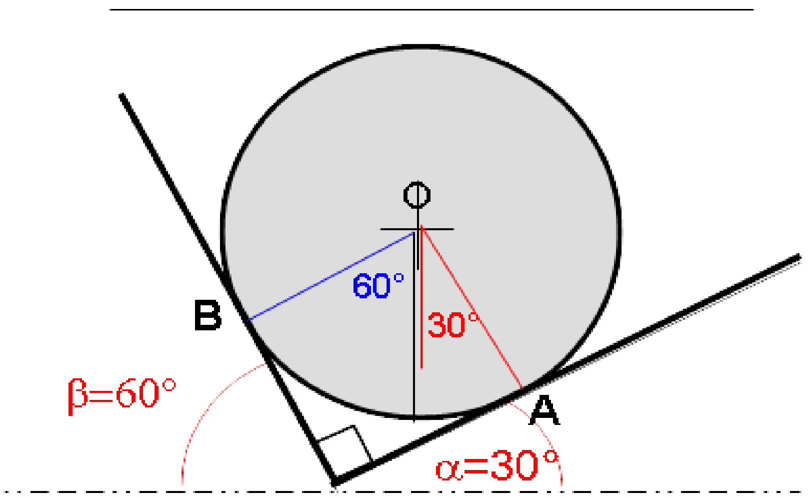
$$R_G=\frac{P.d}{h}=P.\tan\theta=173{,}2N$$

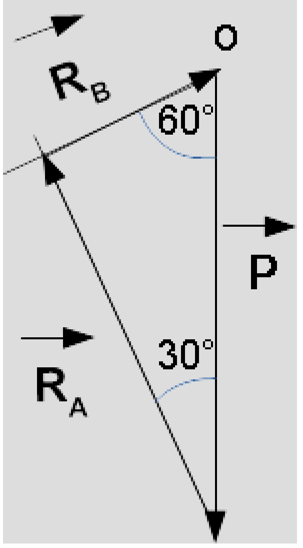
4. Equilibre d'un disque sur 2 plans inclinés(*)

Rappel énoncé :

Un disque de poids $\vec{P}$ ($\|\vec{P}\|=12\,N$) repose sur 2 plans inclinés formant un angle droit
Ces plans font respectivement des angles de 60° et 30° avec le plan horizontal. (voir schéma)
Calculer les réactions des plans sur le disque.

Corrigé :





En l'absence de frottements , les directions des forces $\vec{R_A}$ et $\vec{R_B}$ sont normales aux surfaces de contact.

Celles-ci sont inclinées respectivement de 30° et 60° par rapport à la direction de $\vec{P}$ (voir figure).

La condition d'équilibre s'écrit : $\vec{R_A}+\vec{R_B}+\vec{P}=\vec{0}$. Cette addition vectorielle conduit graphiquement au triangle des forces ci-dessus.
Pour le dessiner commencer par tracer la direction de $\vec{R_A}$ passant par l'extrémité du vecteur $\vec{P}$, puis tracer la direction de $\vec{R_B}$ passant par l'origine O de $\vec{P}$. Le point d'intersection des 2 directions représente à la fois l'extrémité du vecteur $\vec{R_A}$ et l'origine de $\vec{R_B}$.

Ayant choisi une échelle , il est possible de lire directement la valeur des forces en mesurant leur longueur.

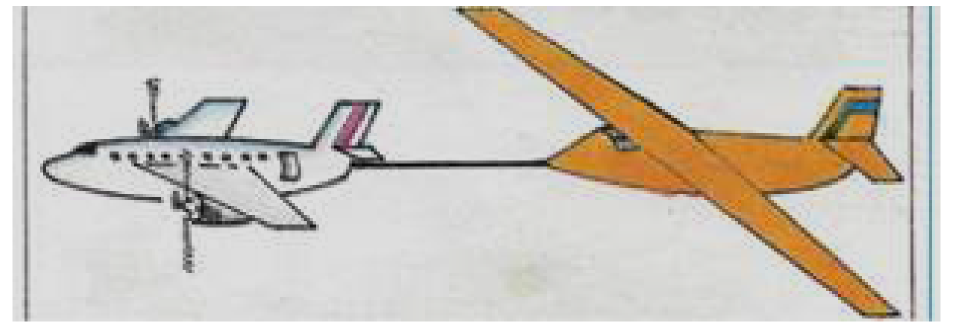
Méthode graphique : échelle choisie : **1cm pour 2N** soit longueur de P = 6cm
On trouve : R_A= 5,1cm soit : $\|\vec{R_A}\|=10{,}2\,N$ et R_B= 3cm $\|\vec{R_B}\|=6\,N$

Méthode par le calcul :

$$\sin 30=\frac{R_B}{P}\Rightarrow R_B=P.\sin 30°=12.0{,}5=6\,N \qquad \cos 30=\frac{R_A}{P}\Rightarrow R_A=P.\cos 30°=12.\frac{\sqrt{3}}{2}=10{,}4\,N$$

.

5. Équilibre des forces s'exerçant sur un planeur remorqué (*)



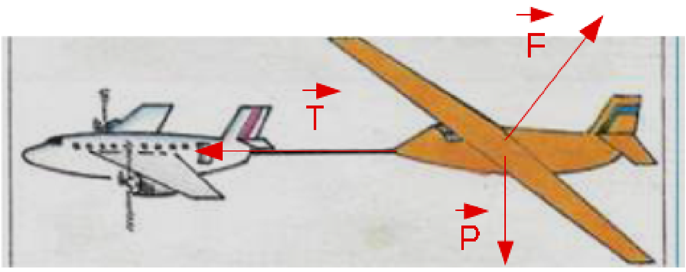
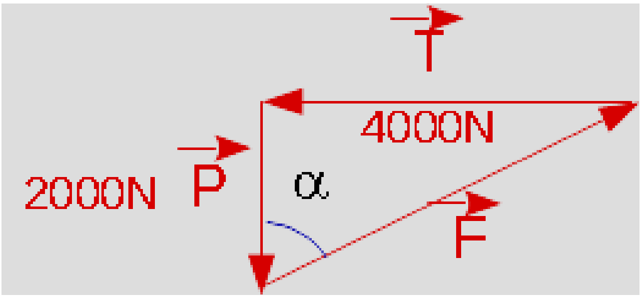
Rappel de l'énoncé

Un avion tire un planeur horizontalement, à vitesse constante. Le câble exerce sur la planeur une force de traction $\vec{T}$ de 4000N; le poids $\vec{P}$ du planeur est égal à 2000N.

1-L'action de l'air sur le planeur est représentée par un vecteur $\vec{F}$ .Lorsque la vitesse est constante, on a : $\vec{F}+\vec{T}+\vec{P}=\vec{0}$. Représenter ces 3 forces sur un schéma.

2-Déterminer $\vec{F}$, somme des forces de portance due à l'air, et l'angle que fait sa direction avec la verticale.

correction

	Représentation schématique des forces (seules les directions de $\vec{P}$ et $\vec{T}$ sont respectées sur ce dessin, car la force $\vec{F}$ est encore inconnue) Le planeur est suppposé en mouvement rectiligne et uniforme. La somme vectorielle des 3 forces appliquées sur lui doit être nulle. Les 3 vecteurs placés bout à bout doivent former un triangle fermé. A partir de ce triangle, il sera possible de déterminer la direction, le sens et l'intensité de $\vec{F}$
	Le schéma à gauche respecte toutes les caractéristiques des forces. (1cm=1000N) $\|\vec{F}\|=\sqrt{(4000^2+2000^2)}=4472\,N$ tan α =4000/2000=2 ; α=artan(2)=1,107rad= $1107.\frac{180}{\pi}=63,4°$