Série A – session 2004 : problème – corrigé

1- a) Calcul de f '(x)

Soit $x \mapsto f(x) = \frac{1}{x} - 1 + \ln x$ définie sur $]0\,;+\infty]$

on a $$f'(x) = \left(\frac{1}{x} - 1 + \ln x\right)' = -\frac{1}{x^2} + 0 + \frac{1}{x}$$

alors $$f'(x) = \frac{x-1}{x^2}$$

b) le signe de f'(x) est celui de x-1

x	0		1		$+\infty$
f '(x)	‖	-	0	+	

2- Calcul de limite de f(x) en +∞

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{x} - 1 + \ln x\right) = +\infty$$

3- a)Autre expression de f(x)

On a $$\frac{1}{x} - 1 + \ln x = \frac{1 - x + x\ln x}{x} \quad \text{d'où } f(x) = \frac{1 - x + x\ln x}{x}$$

b) Calcul de $\lim_{x\to 0^+} f(x)$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{1 - x + x\ln x}{x} = +\infty$$

4-Tableau de variation de f

x	0		1		$+\infty$
f'(x)	‖	-	0	+	
f(x)	‖ $+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$

On a $$f(1) = \frac{1}{1} - 1 + \ln 1 = 0$$

5- Tableau de valeurs

$$f\left(\frac{1}{e}\right) = e - 1 + \ln\frac{1}{e} = e - 1 - 1 = e - 2 \approx 0{,}70$$

$$f(1) = 0$$

$$f(2) = \frac{1}{2} - 1 + \ln 2 = -\frac{1}{2} + \ln 2 \approx 0{,}2$$

$$f(e) = \frac{1}{e} - 1 + \ln e = \frac{1}{e} \approx 0{,}36$$

x	$\frac{1}{e}$	1	2	e
f(x)	e	0	$-\frac{1}{2}+\ln 2$	$\frac{1}{e}$

6- a) Calcul de f ''(x)

En dérivant f' on a $f''(x) = \left(\frac{x-1}{x^2}\right)' = \frac{x^2 - 2x(x-1)}{x^4} = \frac{-x^2+2x}{x^4}$

D'où $f''(x) = \frac{-x+2}{x^3}$

Signe de f''(x) :

x	0		2		$+\infty$
$-x+2$	‖	+	0	-	
x^3	‖	+		+	
f''	‖	+	0	-	

b) Point d'inflexion

f''(x) s'annule et change de signe au point d'abscisse 2
alors I est un point d'inflexion

c) Equation de la tangente en I d'abscisse $x_0 = 2$

C'est de la forme $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

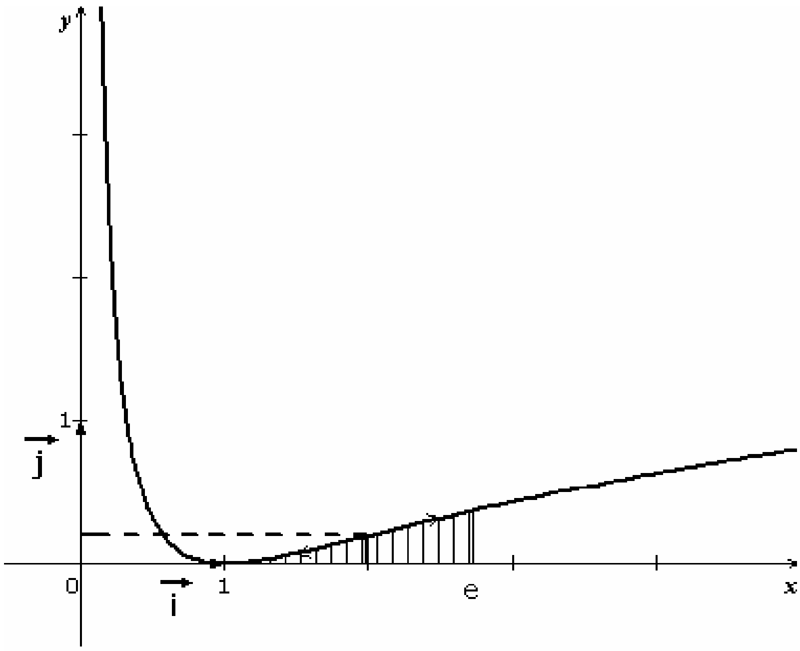
Avec $f(2) = -\frac{1}{2} + \ln 2$ et $f'(2) = \frac{2-1}{2^2} = \frac{1}{4}$

D'où l'équation de (T) : $y = \frac{1}{4}(x-2) - \frac{1}{2} + \ln 2$

C'est-à-dire $y = \frac{1}{4}x - 1 + \ln 2$

7- a) Comme $\lim\limits_{+\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$, la courbe (*C*) admet une branche parabolique de direction asymptotique (x'o x).

b) courbe (*C*) et tangente (T)



8- a) Dérivée de la fonction G sur $]0,+\infty[$

On a $G'(x)$ = x lnx – x   alors $G'(x) = (x)'\ln x + x(\ln x)' - (x)'$

$G'(x)$ = lnx +1 – 1 = lnx

D'où $f(x) = \frac{1}{x} - 1 + G'(x)$

Soit F une primitive de f sur $]0,+\infty[$

On a $F(x) = -\frac{1}{x^2} - x + G(x) = -\frac{1}{x^2} - x + x\ln x - x$

$F(x) = -\frac{1}{x^2} - 2x + x\ln x$

b) Calcul d'aire :

unité d'aire = $\|\vec{i}\|.\|\vec{j}\| = 2x2 = 4cm^2$

l'aire $A = [F(x)]_1^e .4cm^2 = [F(e) - F(1)]x4cm^2$

avec $F(e) = -\frac{1}{e^2} - 2e + e\ln e = -\frac{1}{e^2} - e$

et $F(1) = -1 - 2 + 1\ln 1 = -3$

d'où l'aire $A = \left[(-\frac{1}{e^2} - e) - (-3)\right]x4cm^2$

$A = 4(3 - \frac{1}{e^2} - e)\ cm^2$