Série A – session 2005 : exercice 1 – corrigé

1- Calcul de U_1, V_0, V_1

Pour la suite (U_n), utilisons la relation de récurrence de (U_n)

$$U_0 = 10 \text{ et } U_{n+1} = \frac{U_n - 2}{2}$$

Nous avons $$U_1 = \frac{U_0 - 2}{2} = \frac{10-2}{2} = 4$$

Pour la suite (V_n), nous avons $V_n = \ln(U_n + 2)$

$V_0 = \ln(U_0 + 2) = \ln 12$

$V_1 = \ln(U_1 + 2) = \ln 6$

2- a)Expression de V_{n+1} en fonction de U_n

Nous avons $V_{n+1} = \ln(U_{n+1} + 2)$

En remplaçant U_{n+1} par son expression, nous obtenons

$$V_{n+1} = \ln\left[\frac{U_n - 2}{2} + 2\right] = \ln \frac{U_n + 2}{2}$$

b) Montrons que (V_n) est une suite arithmétique

On a $$V_{n+1} - V_n = \ln\left(\frac{U_n + 2}{2}\right) - \ln(U_n - 2)$$

$= \ln(U_n + 2) - \ln 2 - \ln(U_n - 2)$

$V_{n+1} - V_n = -\ln 2 = \text{constante}$

Alors (V_n) est une suite arithmétique de raison $r = -\ln 2$ et de premier terme $V_0 = \ln 12$.

Sens de variation de (V_n) :

La raison $r = -\ln 2 < 0$, donc (V_n) est décroissante.

3- Expression de V_n en fonction de n

On a $V_n = V_0 + nr$

$V_n = \ln 12 - n \ln 2$ ou $V_n = \ln\left(\frac{12}{2^n}\right)$

4- Expression de Un

On a $\ln(U_n + 2) = V_n$.

Remplaçons V_n par son expression,

Alors $\ln(Un + 2) = \ln\left(\frac{12}{2^n}\right)$ i.e $U_n + 2 = \frac{12}{2^n}$

D'où $U_n = \frac{12}{2^n} - 2$.