Série A – session 2007 : problème – corrigé

Etude de la fonction f définie sur IR par : $f(x) = \dfrac{2e^x - e^{2x}}{2}$

1) Calcul de la limite de f en -∞

On a $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2e^x - e^{2x}}{2} = \dfrac{0-0}{2} = 0$

d'où $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$

Interprétation géométrique

La courbe C admet une asymptote horizontale d'équation y = 0

2) Autre expression de f(x)

Factorisons e^x ; alors $f(x) = \dfrac{e^x\left(2 - e^x\right)}{2} = e^x\left(1 - \dfrac{e^x}{2}\right)$

Calcul de $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

On a $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} (1 - \dfrac{e^x}{2}) = -\infty$

d'où $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} e^x(1 - \dfrac{e^x}{2}) = -\infty$

3) a) Fonction dérivée f'(x)

Sachant que $(e^{ax})' = a.e^{ax}$, on a

$$f'(x) = \left[\frac{1}{2}\left(2e^x - e^{2x}\right)\right]' = \frac{1}{2}\left(2e^x - 2e^{2x}\right) = e^x - e^{2x}$$

En factorisant e^x, on a $f'(x) = e^x\left(1 - e^x\right)$

b) Etude du signe de f'(x)

Comme $e^x > 0$, f '(x) s'annule lorsque $1 - e^x = 0$

C'est-à-dire $e^x = 1$, ce qui équivaut à $x = \ln 1 = 0$

Signe de $(1 - e^x)$: $1 - e^x > 0$ lorsque $e^x < 1$ c'est-à-dire $x < 0$

c) Tableau de variation

x	-∞		0		+∞
f '		+	0	-	
f	0	↗	$\frac{1}{2}$	↘	-∞

$$f(0) = \frac{2e^0 - e^0}{2} = \frac{1}{2}$$

4) a) Coordonnées du point A, intersection de (C) avec l'axe Ox

L'intersection de (C) avec l'axe Ox correspond à un point d'ordonnée $y = 0$

Donc $f(x) = 0$ si $e^x\left(1 - \frac{1}{2}e^x\right) = 0$

$1 - \frac{1}{2}e^x = 0$ i.e. $e^x = 2$, ce qui équivaut à $x = \ln 2$.

d'où les coordonnées du point A $(\ln 2 ; 0)$

b) Equation de la tangente (T) en $x_0 = \ln 2$

C'est de la forme $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

On a $f(x_0) = f(\ln 2) = 0$

$f'(x_0) = f'(\ln 2) = e^{\ln 2}(1 - e^{\ln 2}) = 2(1-2) = -2$

D'où (T) : $y = -2(x - \ln 2) + 0$

L'équation de (T) est $y = -2x + 2\ln 2$

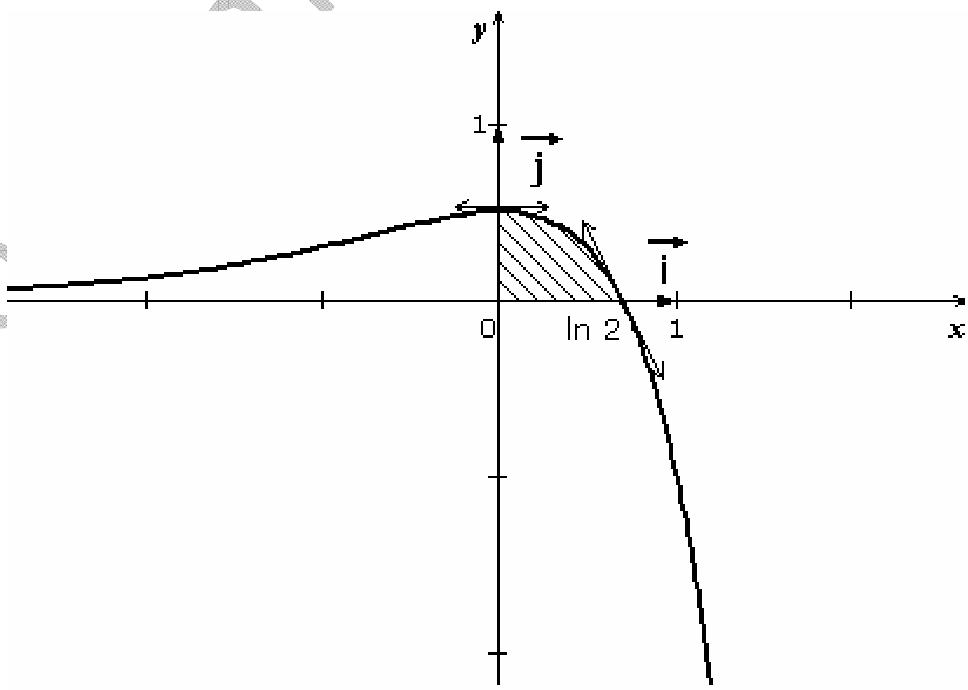
5) Calcul de $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$

On a $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 - \frac{e^x}{2}\right) = -\infty$

D'où $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x}\left(1 - \frac{e^x}{2}\right) = -\infty$

Interprétation géométrique : (C) admet une branche infinie parallèle à Oy

6) Représentation de la courbe (C) et de la tangente (T) Unité graphique : 2 cm



7) a) Autre expression de f

On a $f(x) = \dfrac{2e^x - e^{2x}}{2}$

$$f(x) = \frac{2e^x}{2} - \frac{e^{2x}}{2}$$

d'où $f(x) = e^x - \dfrac{1}{2}e^{2x}$

b) Recherche d'une primitive F de f sur R

Une primitive de $x \mapsto e^{ax}$ (avec a réel) est $x \mapsto \dfrac{1}{a}e^{ax}$

D'où une primitive de f est $F : x \mapsto F(x) = e^x - \dfrac{1}{4}e^{2x}$

c) Calcul d'aire

L'unité d'aire est égale à $\|\vec{i}\| . \|\vec{j}\| = 2\,cm \times 2cm = 4cm^2$

$$A = [F(x)]_0^{\ln 2} \times 4\,cm^2$$

Avec $F(\ln 2) = e^{\ln 2} - \dfrac{1}{4}e^{2\ln 2} = 2 - \dfrac{1}{4}e^{\ln 4} = 1$

Et $F(0) = e^0 - \dfrac{1}{4}e^0 = \dfrac{3}{4}$

D'où l'aire $A = (F(\ln 2) - F(0)) \times 4cm^2 = \left(1 - \dfrac{3}{4}\right) 4cm^2$

$A = 1\ cm^2$