Série A – session 2007 : exercice 1 – corrigé

1- Calcul de U_1, V_0 et V_1

- En Utilisant la relation de récurrence de (U_n), on a

$$U_0 = 0 \ , \quad U_{n+1} = 2 - \frac{5}{U_{n+4}}$$

donc $$U_1 = 2 - \frac{5}{U_0 + 4} = \frac{3}{4}$$

- De même, pour (V_n), on a $V_n = \dfrac{U_n - 1}{U_n + 3}$

alors $$V_0 = \frac{U_0 - 1}{U_0 + 3} = -\frac{1}{3} \quad \text{et} \quad V_1 = \frac{U_1 - 1}{U_1 + 3} = -\frac{1}{15}$$

2- a) Montrons que (V_n) est une suite géométrique

Expression de V_{n+1} en fonction de U_{n+1} puis de U_n

On a $$V_{n+1} = \frac{U_{n+1} - 1}{U_{n+1} + 3}$$

en remplaçant U_{n+1} par son expression, on a

$$V_{n+1} = \frac{\left(2 - \frac{5}{U_n + 4}\right) - 1}{\left(2 - \frac{5}{U_n + 4}\right) + 3}$$

en rendant au même dénominateur, on a

$$V_{n+1} = \frac{\frac{U_n - 1}{U_n + 4}}{\frac{5U_n + 15}{U_n + 4}} = \frac{U_n - 1}{5(U_n + 3)}$$

on vérifie que $U_n \neq -4$

D'où $$V_{n+1} = \frac{1}{5} V_n$$

Conclusion : (V_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{5}$ de premier terme $V_0 = -\dfrac{1}{3}$

b) Expression de Vn en fonction de n

Pour une suite géométrique (V_n) de raison q, le terme général $V_n = V_0 q^n$

Alors $$V_n = -\frac{1}{3}\left(\frac{1}{5}\right)^n$$

3- a) Expression de U_n de V_n

De la relation $$V_n = \frac{U_n - 1}{U_n + 3},$$

on a $V_n(U_n + 3) = U_n - 1$

En mettant les termes contenant U_n au premier membre,

On obtient $V_n U_n - U_n = -3 V_n - 1$

D'où $$U_n = \frac{-3\ V_n - 1}{V_n - 1}$$

b) Expression de Un en fonction de n

Remplaçons V_n par son expression

$$U_n = \frac{-3[-\frac{1}{3}(\frac{1}{5})^n] - 1}{[-\frac{1}{3}(\frac{1}{5})^n] - 1} = \frac{(\frac{1}{5})^n - 1}{-\frac{1}{3}(\frac{1}{5})^n - 1}$$

c) Calcul de lim Un :

On rappelle que :

$$\lim_{n \to +\infty} q^n = \begin{cases} 0 & \text{si } |q| < 1 \\ \infty & \text{si } |q| > 1 \end{cases}$$

Comme la raison q de la suite (V_n) est inférieure à 1

$q = \frac{1}{5} < 1$, on a $\lim\limits_{+\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^n = 0$

alors, $$\lim_{+\infty} U_n = \lim_{+\infty} \frac{\left(\frac{1}{5}\right)^n - 1}{-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{5}\right)^n - 1} = \frac{0-1}{-0-1} = -1$$

D'où $$\lim_{+\infty} U_n = 0$$

La suite (U_n) est donc convergente.