Série A – session 2008 : problème – corrigé

Etude de la fonction f définie sur] 0 ; +∞ [par $f(x) = \left(\frac{1}{x}\right)(\ln x)$

1- a) Calcul de la limite de f(x) en 0^+ .

On a $\lim\limits_{x \to 0^+} \left(\frac{1}{x}\right) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$

Alors $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} \left(\frac{1}{x}\right) \ln x = -\infty$

Interprétation graphique : la courbe (*C*) de f admet un asymptote verticale d'équation x = 0.

b) calcul de la limite de f en +∞.

On a $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

(la courbe (*C*) de f admet un asymptote horizontale d'équation y = 0)

2- a) Fonction dérivée de f.

On a : $f'(x) = \dfrac{\frac{1}{x}x - 1.\ln x}{x} = \dfrac{1 - \ln x}{x^2}$

b) Résolution de l'équation (1 – lnx) = 0.

On a ln x = 1 si x = e

c) Le tableau de variation de f sur]0 ; +∞ [

x	0		e		$+\infty$
f '		+	0	-	
f	$-\infty$	↗	1/e	↘	0

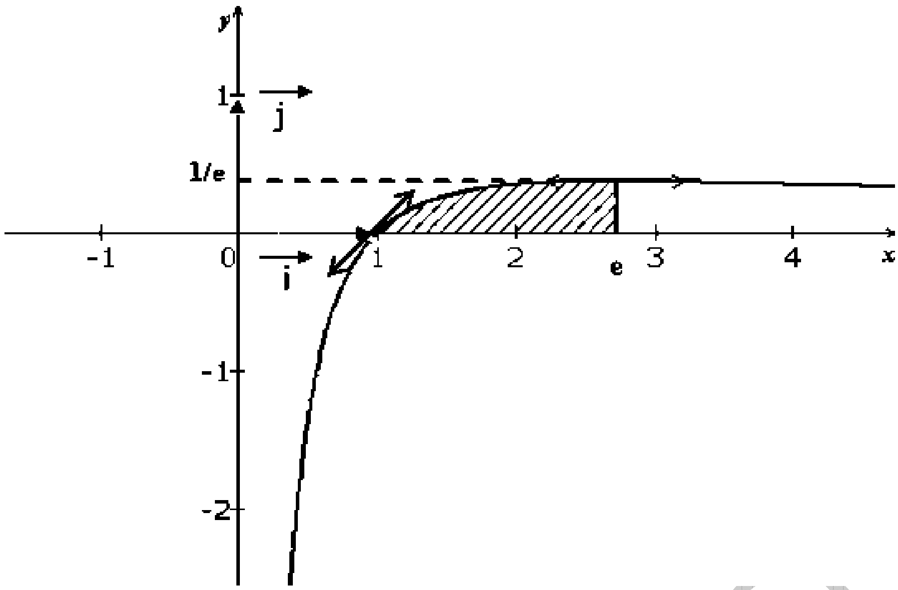
3) a) Equation de la tangente (T) à (*C*) au point A d'abscisse x_0=1.

C'est de la forme : y = f '(1) (x – 1) + f(1) .

Avec f(1)= 1 ln 1 = 0 et f '(1) = $\frac{1-\ln 1}{1}$ =1.

D'où y = x – 1.

b) Tracé de la courbe (*C*) : unité graphique 2 cm



4) a) F est une primitive de f sur]0 ; +∞ [si F '(x) = f(x).

On a $F(x) = \frac{1}{2}(\ln x)^2 + 3$

En dérivant F, on a $F'(x) = \dfrac{\ln x}{x} = f(x)$.

Donc F est une primitive de f sur] 0 ; +∞ [

b) Calcul d'aire (unité d'aire = 2 x 2 = 4 cm²)

L'aire A du domaine plan délimité par la courbe (*C*), l'axe des abscisses et les droites d'équations x = 1 et x = e est :

$$A = [F(x)]_1^e \times 4\text{cm}^2.$$

On a $F(e) = \frac{1}{2}(\ln e)^2 + 3 = \frac{7}{2}$ et $F(1) = \frac{1}{2}(\ln 1)^2 + 3 = 3$

D'où $A = [F(e) - F(1)] \times 4\,\text{cm}^2 = \frac{1}{2} \times 4\,\text{cm}^2 = 2\,\text{cm}^2$