Série A – session 2010 : problème – corrigé

Etude de la fonction f est définie par f(x) = x – 2 ln (x).

1 – a) Autre expression de f(x)

En factorisant x, on a : $f(x) = x\left(1 - \frac{2\ln(x)}{x}\right)$

b) limite de f en + ∞

En admettant que $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

On a $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x\left(1 - \frac{\ln x}{x}\right) = +\infty$

c) Interprétation graphique de la limite de f en 0

Sachant que $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = +\infty$, la courbe (C) admet une asymptote verticale d'équation x = 0.

2 - a) Dérivée de f

On a $f'(x) = 1 - 2\frac{1}{x} = \frac{x-2}{x}$

b) Etude du signe de f ' (x)

f ' (x) s'annule pour x = 2

x	0		2		$+\infty$
$\frac{x-2}{x}$	‖	-	0	+	

c) Tableau de variation de f

x	0		2		$+\infty$
$f'(x)$	‖	-	0	+	
$f(x)$	‖ $+\infty$	↘	2-2ln2	↗	$+\infty$

3 – a) Points particuliers

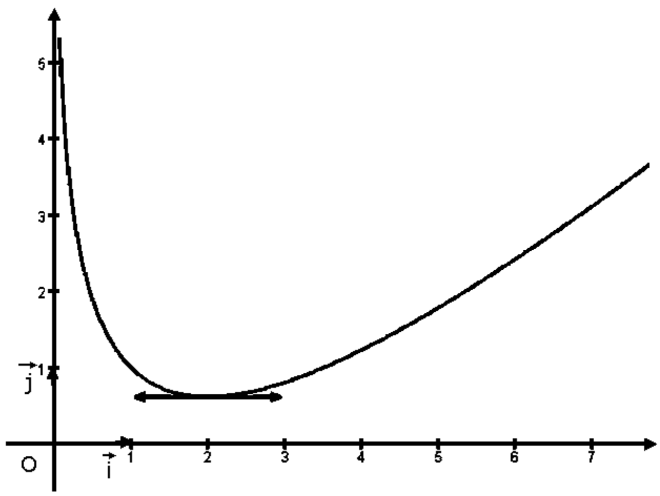
On a f(1) = 1 – 2 ln(1) = 1 (C) passe par A (1 ; 1)
f(2) = 2 – 2 ln(2) (C) - '' - B (2 ; 2 – ln 2)
f(e) = e – 2 ln(e) = e – 2 (C) - '' - C (e ; e – 2)

b) Etude de la tangente (T)

On a f '(2) = 0 et f(2) = 2 – 2 ln(2)

la tangente (T) est horizontale et d'équation y = 2 – 2 ln(2)

b) Courbe représentative de f. unité graphique : 2 cm



Pour A2 seulement

a) Expression de g(x)

Posons $u(x) = x^2 + 3$, on a $u'(x) = 2x$

Alors $g(x) = \frac{14x}{x^2+3} = 7\frac{2x}{x^2+3} = 7\frac{u'(x)}{u(x)}$

Rappelons qu'une primitive de $x \mapsto \frac{u'(x)}{u(x)}$ est $x \mapsto \ln|u(x)|$

D'où une primitive *G* de *g* définie par : $G(x) = 7 \ln|u(x)| = 7\ln(x^2+3)$

b) Calcul d'aire

unité d'aire $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1{,}5 \times 2 = 3\,cm^2$

l'aire $A = \left|G(\sqrt{3}) - G(0)\right| \times 3\,cm^2$

On a $A = \left|7\ln 6 - 7\ln 3\right| \times 3\,cm^2 = 21\ln 2\ \ cm^2$