

A

Série : A

Code matière : 009

Epreuve de : MATHÉMATIQUES

Durée : 02 h 15mn

Coefficient : A1 = 1; A2 = 3

NB : - Les deux exercices et le problème sont obligatoires.
 - Machine à calculer scientifique non programmable autorisée.

EXERCICE 1 (5 points)

Pour tout entier naturel n , on pose $U_n = \left(\frac{3}{4}\right)^n$ et $V_n = \ln(U_n)$.

1- a- Calculer U_0, U_1, V_0 et V_1 (0,25pt×4)

b- Montrer que (U_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{3}{4}$. (1pt)

c- Calculer en fonction de n la somme $S_n = U_0 + U_1 + \dots + U_n$. (0,75pt)

2- a- Vérifier que (V_n) est une suite arithmétique dont on précisera la raison. (1pt)

b- En déduire la variation de la suite (V_n) (0,25pt)

3- Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n$ (0,5pt×2)

EXERCICE 2 (5 points)

Le tableau suivant représente l'évolution des bénéfices par mois d'un marchand (y_i) (en millions d'Ariary) où y_6 est un nombre entier naturel.

Mois	Janvier	Février	Mars	Avril	Mai	Juin
Rang du mois (x_i)	1	2	3	4	5	6
Bénéfice (y_i)	32	34	36	41	42	y_6

1- Calculer la valeur de y_6 si la moyenne de la série (y_i) est $\bar{y} = 39$. (1pt)

2- Dans tout ce qui suit, on prendra $y_6 = 49$.

a- Représenter le nuage des points $M_i(x_i, y_i)$ dans un repère orthogonal. (1pt)

- Sur l'axe des abscisses : prendre 1 cm comme unité.

- Sur l'axe des ordonnées : placer 30 à l'origine et prendre 1 cm pour représenter 2 millions d'Ariary.

b- Déterminer les coordonnées du point moyen G. (1pt)

c- Ecrire l'équation cartésienne de la droite d'ajustement linéaire $(G_1 G_2)$ par la méthode de Mayer. (1pt)

3- A l'aide de cette droite, estimer le bénéfice du marchand au mois de septembre. (1pt)

PROBLÈME (10 points)

A₁ — A₂

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = \frac{e^x}{e^x + 1} + 2$

On note par (\mathcal{C}) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) d'unité 2cm.

- 1- Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$. Interpréter graphiquement ce résultat. (0,75pt ; 0,75pt)

- 2- a- Démontrer que pour tout réel x , $f(x) = 3 - \frac{1}{e^x + 1}$ (0,5pt ; 0,5pt)
b- En déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$. Que peut-on en conclure pour la courbe (\mathcal{C}) ? (0,75pt ; 0,75pt)

- 3- a- Vérifier que la fonction dérivée $f'(x) = \frac{e^x}{(e^x + 1)^2}$ (1pt ; 1pt)
b- Dresser le tableau de variation de f . (2pts ; 1,5pt)

- 4- a- Montrer que le point $I\left(0 ; \frac{5}{2}\right)$ est un centre de symétrie de la courbe (\mathcal{C}) . (1pt ; 0,75pt)
b- Ecrire l'équation de la tangente (T) à la courbe (\mathcal{C}) au point d'abscisse $x_0 = 0$. (1pt ; 1pt)
c- Calculer à 0,1 près $f(-1)$, $f(1)$, et $f(2)$. (1,5pt ; 0,75pt)

- 5- Tracer la courbe (\mathcal{C}) et (T) dans le même repère. (1,5pt ; 1pt)

Pour A2 seulement

- 6- Soit F la fonction définie sur \mathbb{R} par : $F(x) = 2x + \ln(e^x + 1)$.
a- Calculer $F'(x)$. Que peut-on en conclure ? (1pt)
b- Calculer, en cm^2 , l'aire géométrique \mathcal{A} du domaine plan limité par la courbe (\mathcal{C}) , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = \ln 3$. (1pt)

On donne : $\ln 2 \simeq 0,7$; $\ln 3 \simeq 1,1$; $e^{-1} \simeq 0,4$; $e \simeq 2,7$; $e^2 \simeq 7,4$.
