Série D - session 2000 : exercice 3 – corrigé

1. Données : 12 boules dont : 3 rouges, 4 noires et 5 vertes.

Expérience : tirage simultané de 3 boules de l'urne.

Résultat : $\{b_1, b_2, b_3\}$

Choix : = $\frac{12 \times 11 \times 10}{3 \times 2 \times 1}$ = 220

a. Détermination du nombre de tirages possibles.

Il y a 220 tirages possibles.

b. Détermination des probabilités des événements suivants :

* A : « Avoir 3 boules noires ».

A = { N, N, N } donc, card A = 4.

Ainsi, p (A) = $\frac{4}{220}$ = $\frac{1}{55}$

* B : « Avoir 3 boules de même couleur ».

B : « Avoir 3 boules noires » ou « Avoir 3 boules blanches » ou « Avoir 3 boules vertes »

B = {{ N, N, N }, { B, B, B },{ V, V, V }} donc, card B = 4 + 10 + 1 = 15 .

Ainsi, p (B) = $\frac{15}{220}$ = $\frac{3}{44}$

* C : « Avoir au moins deux boules noires ».

C : « Avoir 2 noires » ou « avoir 3 noires »

$C = \{ \overline{N}, N, N \}$ ou $\{ N, N, N \}$

.Ainsi, p (B) = $\frac{46}{220}$ = $\frac{23}{110}$

* D : « Avoir au plus deux boules rouges ».

D : « Avoir 2 rouges ou avoir 1 rouge ou n'avoir aucune rouge»

$D = \{\overline{R}, \overline{R}, \overline{R}\}$ou $\{ \overline{R}, \overline{R}, R \}$ ou $\{ \overline{R}, R, R \}$

.Ainsi, p (B) = $\frac{219}{220}$.

2. Données : 25% des boules sont rouges. Donc si on tire 1 boule de l'urne, la probabilité pour que cette boule soit rouge est $\frac{25}{100}$ = $\frac{1}{4}$

Expérience : Tirage successif avec remise de 4 boules .

« gain » = obtention d'une boule rouge lors d'un tirage d'une boule de l'urne.

Résultat : (b_1, b_2, b_3, b_4) ordonnée avec répétition.

X la variable aléatoire qui à chaque expérience associe le nombre de gains.

a. Vérifions que l'univers image de X est {0, 1, 2, 3, 4}.

Lorsqu'on effectue un tirage successif avec remise avec de 4 boules de l'urne, les événements élémentaires possibles sont « n'avoir aucune rouge » ou «avoir une seule rouge » ou « avoir exactement 2 rouges » ou « avoir exactement 3 rouges » ou avoir 4 rouges ». Ainsi, l'univers image de X est X (Ω) = {0, 1, 2, 3, 4}.

Remarquons d'abord que une suite de 4 épreuves de Bernoulli qui, à chaque épreuve, on peut considérer comme succès le fait d'obtenir une boule rouge dont la probabilité est égale à $\frac{1}{4}$.

b. Montrons que la probabilité d'avoir 3 gains est égale à $\frac{3}{64}$.

$([X = 3]) = (R, R, \overline{R}, R)$, donc $p ([X = 3]) = 4 \times (\frac{1}{4})^3 \times \frac{3}{4} = \frac{3}{64}$.

c. Loi de probabilité de X.

$([X = 0]) = (\overline{R}, \overline{R}, \overline{R}, \overline{R})$, donc $p ([X = 0]) = (\frac{3}{4})^4 \times = \frac{81}{256}$.

$([X = 1]) =, (\overline{R}, \overline{R}, \overline{R}, R)$, donc $p ([X = 1]) = 4 \times (\frac{3}{4})^3 \times (\frac{1}{4}) = \frac{27}{64}$.

$([X = 2]) = (\overline{R}, \overline{R}, R, R)$, donc $p ([X = 2]) = 6 \times (\frac{1}{4})^2 \times (\frac{3}{4})^2 = \frac{27}{128}$.

$([X = 4]) = (R, R, R, R)$, donc $p ([X = 4]) = (\frac{1}{4})^4 = \frac{1}{256}$.

x_i	0	1	2	3	4
P ([X = xi])	$\frac{81}{256}$	$\frac{108}{256}$	$\frac{54}{256}$	$\frac{12}{256}$	$\frac{1}{256}$

d. Fonction de répartition F de X.

Si $x \leq 0$, F (x) = 0

Si $x \in]\,0 ; 1\,]$, F (x) = $\frac{81}{256}$

Si $x \in]\,1 ; 2\,]$, F (x) = $\frac{189}{256}$

Si $x \in]\,2 ; 3\,]$, F (x) = $\frac{249}{256}$

Si $x \in]\,3 ; 4\,]$, F (x) = $\frac{255}{256}$

Si $x > 4$, F (x) = 1

e. n étant le nombre de boules rouges, $3n - 7$ le nombre de boules vertes et $2n - 1$ le nombre de boules noires dans l'urne, calculons n.

Soit N le nombre total de boules, alors $N = n + 3n - 7 + 2n - 1$. Donc, $N = 6n - 8$.

Or $n = \frac{N}{4}$, par conséquent, $N = 6 \times \frac{N}{4} - 8$.

Ainsi, $3N - 16 = 2N$ c'est à dire $N = 16$. Il s'ensuit que $n = 4$.