Série D - session 2000 : exercice 1 – corrigé

1.a. Résolution de l'équation : $z^2 - (6 - i)z + 11 - 3i = 0$.
$\Delta = (6 - i)^2 - 4(11 - 3i) = -9 = (3i)^2$.

Ainsi, $z' = \dfrac{6 - i - 3i}{2} = \dfrac{6 - 4i}{2} = 3 - 2i$

$z'' = \dfrac{6 - i + 3i}{2} = \dfrac{6 + 2i}{2} = 3 + i$

b. Détermination des nombres complexes z et z ' tels que :

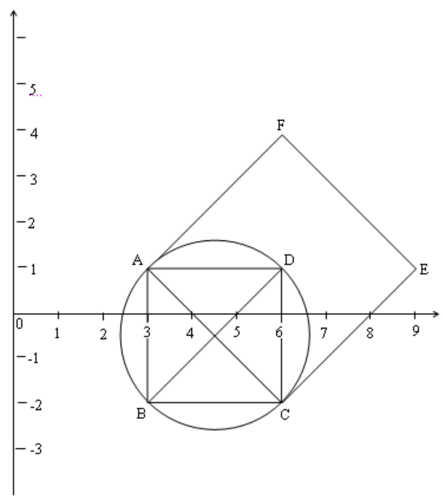
$$\begin{cases} 2z - z = 6 - 5i \\ -z + z = 3i \end{cases}$$

En effectuant la somme membres à membres de ces 2 équations, on obtient, $z = 6 - 2i$. Ainsi, $z' = z + 3i = 6 - 2i = 6 + i$.

Donc $z = 6 - 2i$ et $z'' = 6 + i$.

A ($a = 3 + i$), B ($b = 3 - 2i$), C ($c = 6 - 2i$) et D ($d = 6 + i$)

2. a. Construction des quatre points A, B, C et D :



b. Démontrons que le triangle (BAD) est isocèle et rectangle en A

$z_B - z_A = 3 - 2i - 3 - i = -3i$ et $z_D - z_A = 6 + i - 3 - i = 3$. Ainsi, $\dfrac{z_B - z_A}{z_D - z_A} = i$. Par conséquent, AB = AD et $(AB, AD) = \dfrac{\pi}{2}$. Par conséquent, le triangle (BAD) est isocèle et rectangle en A.

Démontrons que le triangle (BCD) est isocèle et rectangle en C.

$Z_D - z_C = 6 + i - 6 + 2i = 3i$ et $z_B - z_C = 3 - 2i - 6 + 2i = -3$. Ainsi, $\frac{z_B - z_C}{z_D - z_C} = i$. Par conséquent, DC= BC et (DC, BC) = $\frac{\pi}{2}$. Par conséquent, le triangle (BCD) est isocèle et rectangle en C.

c. Montrons que les quatre points A, B, C et D se trouvent sur un même cercle (Γ)

Le triangle (BAD) est isocèle et rectangle en A, donc les points A, B et D appartiennent au cercle de diamètre [BD] ; d'une manière analogue, les points B, Cet D appartiennent au cercle de diamètre [BD]. Par conséquent, les points A, B, C, et D appartiennent au cercle (Γ) de diamètre [BD]

Le centre de (Γ) est le point I qui n'est autre que le milieu du segment [BD], et son rayon est R = $\frac{BD}{2}$

3. S la similitude plane directe telle que S (A) = A et S (B) = C.

a. Eléments caractéristiques de S :

Le centre de S est le point A, le rapport de S est k = $\frac{AC}{AB} = \sqrt{2}$ et l'angle de S est (AB, AC) = $\frac{\pi}{4}$.

b. Construction du transformé de ABCD par S.

C'est le carré ACEF (Voir figure) .