Série D - session 2001 : exercice 4 - corrigé

Soit f la fonction définie par $\mathbf{f(x) = (2 - x)e^{x} - 2x - 2}$

1.- Soit g la fonction définie par $\mathbf{g(x) = (1 - x)e^{x} - 2}$

a) variation de g :

$\mathbf{D_g =]-\infty;+\infty[}$

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty} (e^{x} - xe^{-x} - 2)$$

$\lim_{x\to-\infty} e^{x} = 0$, $\lim_{x\to-\infty} xe^{x} = 0$ et $\lim_{x\to-\infty} -2 = -2$, donc $\lim_{x\to-\infty} g(x) = -2$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} ((1 - x)e^{x} - 2)$$

$\lim_{x\to+\infty} (1 - x) = -\infty$, $\lim_{x\to+\infty} e^{x} = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} -2 = -2$

Donc $\lim_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$

g est dérivable sur IR et $\mathbf{g'(x) = -e^{x} + (1 - x)e^{x} - 0}$

ainsi $\mathbf{g'(x) = -xe^{x}}$

Tableau de variation de g

x	$-\infty$		0		$+\infty$
-x		+	0	−	
e^{x}		+		+	
g'(x)		+	0	−	
g(x)	-2	↗	-1	↘	$-\infty$

b) g admet un maximum en 0, qui est égal à -1, donc qule que soit x, g(x) <-1 < 0
Par conséquent, g(x) < 0 quel que soit le réel x.

2.- Variatiopns de f

$\mathbf{D_f =]-\infty;+\infty[}$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} (2 - x)e^{x} - 2x - 2$$

$$\lim_{x\to-\infty} (2 - x)e^{x} = \lim_{x\to-\infty} 2e^{x} - xe^{x} = 0$$

$$\lim_{x\to-\infty} (-2x - 2) = +\infty$$

donc $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} (2-x)e^{x} - 2x - 2$

$\lim\limits_{x\to+\infty} (2-x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{x} = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty} (2-x)e^{x} = -\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} (-2x-2) = -\infty$

Par conséquant, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

f est dérivable sur IR et $f'(x) = -e^{x} + (2-x)e^{x} - 2 - 0$

$f'(x) = (1-x)e^{x} - 2$

$f'(x) = g(x)$ donc f '(x) <0 quel que soit x

Tableau de variation

x	$-\infty$	$+\infty$
f '(x)	$-$	
f(x)	$+\infty$	$-\infty$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - (-2x-2)) = \lim\limits_{x\to+\infty} (2-x)e^{x} = 0$ donc la droite (D) d'équatyion y = -2x-2 est une asymptote à la courbe au voisinage de $+\infty$

c*) Etude de la position de (C) par rapport à (D)*

Etudions le signe de $f(x) - (-2x-2)$

$f(x) - (-2x-2) = (2-x)e^{x}$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
2-x	+	0	$-$
e^{x}	+		+
$(2-x)e^{x}$	+	0	$-$

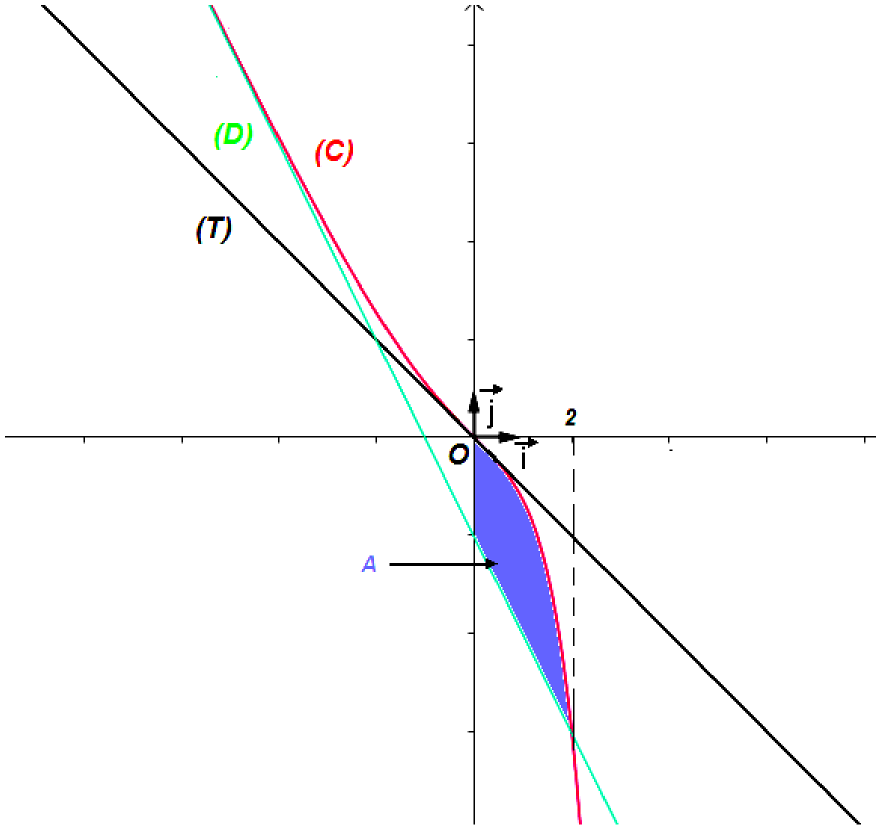
d) f'(x)=g(x), donc g'(x)= f ''(x)

D'après 1.a), g' = f '' sannule et change de signe en 0, et f(0)= 0, donc le poitn O (0,0) est un point d'infléxion.

Tangente en O:

L'équation de la tangente en O est **y = f '(0) (x-0) + f(0).**

Puisque $\mathbf{f'(0) = g(0) = (1-0)e^0 - 2 = -1}$ et $\mathbf{f(0) = (2-0)e^0 - 2.0 - 2 = 0}$
l'équation de (T) est **y = -x**.



3.- Calcul d'aire

L'aire A du domaine limité par la courbe (C), la droite (D), et les droites d'équations x =0 et x=2 est donnée par $\mathbf{A = \int_0^2 (f(x) - (-2x-2))dx}$

$\mathbf{A = \int_0^2 (2-x)e^x dx}$ .1.1cm^2

Posons u = 2-x et $\mathbf{v' = e^x}$

Alors $\mathbf{u' = -1}$ **et** $\mathbf{v = e^x}$

$$\mathbf{A = \left[(2-x)e^x\right]_0^2 - \int_0^2 (-e^x)dx}$$

$$\mathbf{= -2e^0 + e^2 - e^0}$$

$\mathbf{A = e^2 - 3}$ cm^2

$A \approx 4{,}39 cm^2$