Série D – session 2002 : exercice 2 – corrigé

1.- Soit $\mathbf{P(z) = z^3 - (5+i)z^2 + (10+6i)z - 8 - 16i}$

L'équation P(z)= 0 admet une solution imaginaire pure $\mathbf{i\alpha}$, si $\mathbf{P(i\alpha) = 0}$

$$\mathbf{P(i\alpha) = (i\alpha)^3 - (5+i)(i\alpha)^2 + (10+6i)(i\alpha) - 8 - 16i}$$
$$\mathbf{P(i\alpha) = i(-\alpha^3 + \alpha^2 + 10\alpha - 16) + 5\alpha^2 - 6\alpha - 8}$$

$\mathbf{P(i\alpha) = 0}$ équivaut au système $\begin{cases} -\alpha^3 + \alpha^2 + 10\alpha - 16 = 0 & (1) \\ 5\alpha^2 - 6\alpha - 8 = 0 & (2) \end{cases}$

Résolvons l'équation (2) : $\mathbf{5\alpha^2 - 6\alpha - 8 = 0}$

$$\mathbf{\Delta = (-6)^2 - 4(-8)}$$
$$\mathbf{\Delta = 14^2}$$

On a alors $\mathbf{\alpha = -\frac{8}{10}}$ **ou** $\mathbf{\alpha = 2}$

Seul 2 vérifie l'équation (1)

Donc la solution imaginaire de l'équation est 2i

2.- *Tableau de Horner* :

	1	**- 5 -i**	**10 + 6i**	**- 8 -16i**
$\alpha = 2i$		**2i**	**- 2 -10i**	**8 +16i**
	1	**- 5 + i**	**8 - 4i**	**0**

d'où $\mathbf{P(z) = (z - 2i)(z^2 - (5 - i)z + 8 - 4i)}$

2.- P(z)=0 si et seulement si $\mathbf{z - 2i = 0}$ **ou** $\mathbf{z^2 - (5-i)z + 8 - 4i = 0}$

Résolvons l'équation $\mathbf{z^2 - (5-i)z + 8 - 4i = 0}$

$$\mathbf{\Delta = [-(5-i)]^2 - 4(8 - 4i)}$$
$$\mathbf{\Delta = -8 + 6i}$$

Soit $\mathbf{\delta = x + iy}$ une racine de $\mathbf{\Delta}$. Alors $\mathbf{\delta^2 = x^2 - y^2 + 2ixy = -8 + 6i}$

Ce qui équivaut au système $\begin{cases} x^2 - y^2 = -8 \\ 2xy = 6 \\ x^2 + y^2 = 10 \end{cases}$

La résolution de ce système donne $\mathbf{x = \pm 1}$ **et** $\mathbf{y = \pm 3}$.

xy > 0, donc x et y sont de même signe . D'où $\delta = -1-3i$ **ou** $\delta = 1+3i$

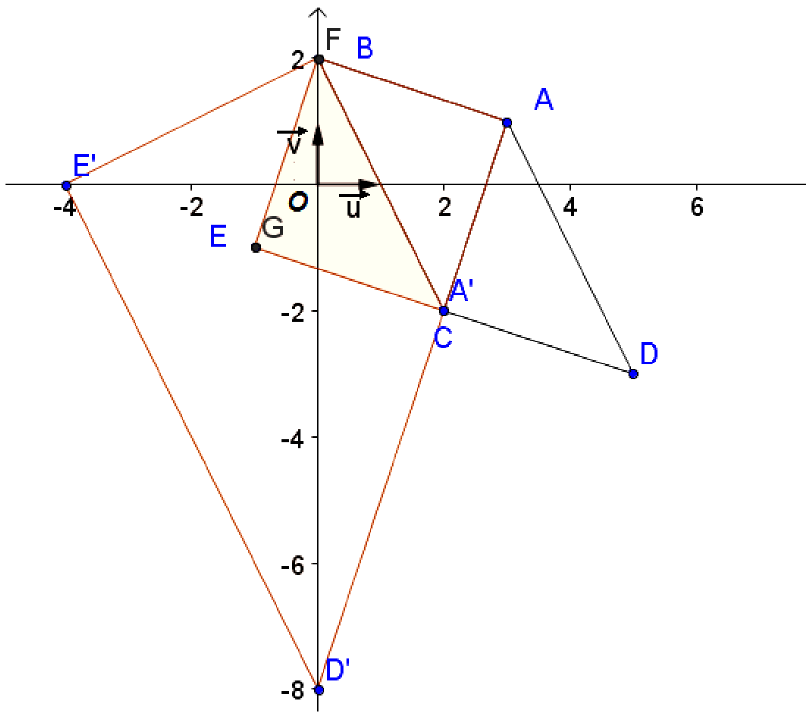
On va prendre $\delta = 1+3i$.

Les racines de l'équation sont $z' = 2-2i$ **et** $z'' = 3+i$

D'où les solutions de l'équation **P(z) = 0** sont $2i, 2-2i$ **et** $3+i$.

2.- Les points A, B et C ont pour affixes respectives $z_A = 3+i$, $z_B = 2i$ **et** $z_C = 2-2i$.

a)



b) Forme trigonométrique de $Z = \dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$

$$Z = \frac{2-2i-3-i}{2i-3-i}$$

$$Z = i$$

$$|Z| = 1 \text{ et } \arg Z = \frac{\pi}{2}$$

donc $Z = e^{i\frac{\pi}{2}}$

$|Z| = 1$ équivaut à $\left|\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right| = 1$ ou $|z_C - z_A| = |z_B - z_A|$. Ce qui signifie AC = AB. Ainsi le triangle ABC est isocèle.

$\arg Z = \frac{\pi}{2}$ équivaut à $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{2}$, d'où le triangle ABC est rectangle en A.

ABC est don un triangle isocèle rectangle en A

d) Puisque ABC est isocèle et rectangle, ABEC est un carré si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CE}$

Ce qui se traduit en termes d'affixes par $z_B - z_A = z_E - z_C$ ou $z_E = z_B - z_A + z_C$.

En remplaçant chaque affixe par sa valeur, on a z_E= 2i-3-i+2-2i

Ce qui donne $z_E = -1 - i$

e) ABCD est un parallèlogramme si et seulement si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.

Ce qui se traduit par $z_B - z_A = z_C - z_D$. On a alors $z_D = z_C - z_D - z_A$, ou $z_D = 2 - 2i - i + 3 - 3 - i + 2$

Donc $z_D = 5 - 3i$

3.- S est la similitude transformant A en C et laisse B invariant. B est donc le centre de S et $S(A) = C$.

- *Expression complexe de S*

Si z'=az+b est l'expression complexe de S, alors $\begin{cases} z_C = az_A + b \\ z_B = az_B + b \end{cases}$

Par soustraction membre à membre, on a : $z_C - z_B = a(z_A - z_B)$

Ou $a = \frac{z_C - z_B}{z_A - z_B}$.

$= \frac{2 - 2i - 2i}{3 + i - 2i}$

$a = \frac{(2 - 4i)(3 + i)}{(3 - i)(3 + i)}$.

Finalement on a : $a = 1 - i$

En remplaçant a par sa valeur dans l'équation $z_B = az_B + b$. On a $b = 2i(1 - 1 + i) = -2$

D'où l'expression complexe de S est $z' = (1 - i)z - 2$

- *Eléments caractéristiques*

$a = 1 - i$, donc $|a| = |1 - i| = \sqrt{2}$

$a = 1 - i = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$\frac{\sqrt{2}}{2} = \cos(-\frac{\pi}{4})$ et $-\frac{\sqrt{2}}{2} = \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)$

Le centre de S est B, le rapport $\sqrt{2}$, son angle $-\frac{\pi}{4}$

b) S(A)=C, S(B)=B, il reste à déterminer les images de E et de D
$z' = (1-i)z - 2$, donc $z_E' = (1-i)(-1-i) - 2 = -4$
et $z_D' = (1-i)(5-3i) - 2 = -8i$

L'image de ABED est donc le parallèlogramme CBE'D'