Série D – session 2003 : exercice 1 – corrigé

1.- *Résolution de l'équation* $z^2 - (1-i)z + 2 + 2i = 0$

$$\Delta = [-(1+i)]^2 - 4(2+2i)$$
$$\Delta = -8 - 6i$$

Soit $\delta = x + iy$ une racine de Δ. Alors $\delta^2 = x^2 - y^2 + 2ixy = -8 - 6i$

Ce qui donne $\begin{cases} x^2 - y^2 = -8 \\ 2xy = -6 \\ x^2 + y^2 = \sqrt{(-8)^2 + (-6)^2} = 10 \end{cases}$

La résolution de ce système donne $x = \pm 1$ **et** $y = \pm 3$.

xy < 0, donc x et y sont de signes contraires. D'où $\delta = 1 - 3i$ **ou** $\delta = -1 + 3i$

On va prendre $\delta = 1 - 3i$.

Les racines de l'équation sont $z' = 1 - i$ **et** $z'' = 2i$

2.- S est la similitude plane directe d'expression analytique : $\begin{cases} x' = -x - y + 3 \\ y' = x - y + 1 \end{cases}$

a) On a donc $x' + iy' = (-x - y + 3) + i(x - y + 1)$

$$= -x - y + 3 + ix - iy + i$$
$$= x(-1+i) - y(1+i) + 3 + i$$
$$= x(-1+i) + i^2 y(1+i) + 3 + i$$
$$= x(-1+i) + iy(i-1) + 3 + i$$

$$x' + iy' = (-1+i)(x+iy) + 3 + i$$

d'où $z' = (-1+i)z + 3 + i$

Eléménts caractériqtiques:

$$|-1+i| = \sqrt{2}$$

$$-1 + i = \sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \text{ donc } \arg(-1+i) = \frac{3\pi}{4}$$

Soit $\Omega(\omega)$ le centre de S. ω vérifie $\omega = (-1+i)\omega + 3 + i$

La résolution de cette équation donne $\omega = 1 + i$

Le centre de la similitude S est donc $\Omega(1+i)$, le rapport $\sqrt{2}$, et l'angle $\frac{3\pi}{4}$

c) A(0,2) donc $z_A = 2i$ et I(1;2), donc $z_I = 1 + 2i$

Notons A' et I' les images respectives de A et de I et z_A' et z_I' leurs affixes

On a $z_A' = (-1+i)2i + 3 + i$

$$z_A' = 1 - i$$

et $z_I' = (-1+i)(1+2i)+3+i$

$z_I' = 0$

3.- R est la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$. Son expression complexe est

$z' - z_A = e^{i\frac{\pi}{2}}(z - z_A)$ ou $z' = iz + 2 + 2i$.

L'expression de la composée S'=RoS est donc $z' = i\left[(-1+i)z + 3 + i\right] + 2 + 2i$

Ce qui donne $z' = (-1-i)z + 1 + 5i$

$|-1-i| = \sqrt{2}$. C'estdonc une similitude plane directe de rapport $\sqrt{2}$

$-1-i = \sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. Donc l'angle de S' est $\frac{5\pi}{4}$

Soit $\Omega(\omega)$ le centre de S. ω vérifie $\omega = (-1-i)\omega + 1 + 5i$

La résolution de cette équation donne $\omega = \frac{7+9i}{5}$

Le centre de S est $\Omega\left(\frac{7+9i}{5}\right)$, le rapport $\sqrt{2}$, et l'angle $\frac{5\pi}{4}$

4.- $|(-1+i)z + 3 + i| = \sqrt{2}$ équivaut à $|-1+i|\left|z + \frac{3+i}{-1+i}\right| = \sqrt{2}$

ou $|z - 1 - 2i| = 1$

L'ensemble des points M(z) tels que $|(-1+i)z + 3 + i| = \sqrt{2}$ est donc le cercle de centre I (1+2i) et de rayon 1