Problème

On considère la fonction f définie par $f(x) = e^x \ln x + \frac{e^x}{x}$

1.- Soit $g(x) = \ln x + \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}$.

a) $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} (\ln x + \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2})$

C'est une forme indéterminée. La réduction au même dénominateur donne

$\lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} (\frac{x^2 \ln x + 2x - 1}{x^2})$

$\lim\limits_{x\to 0^+} x^2 \ln x + 2x - 1 = -1$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} x^2 = 0^+$, donc $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x\to +\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} (\ln x + \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2})$

$\lim\limits_{x\to +\infty} (\ln x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} (\frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}) = 0$ donc $\lim\limits_{x\to +\infty} g(x) = +\infty$

b) ln et $x \mapsto \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}$ sont dérivables et la sommes de deux fonctions dérivables est dérivable, don g est dérivable. Et $g'(x) = \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} + \frac{2}{x^3}$

d'où $g'(x) = \frac{x^2 - 2x + 2}{x^3}$

Etudions le signe du numérateur : $x^2 - 2x + 2$:

$\Delta = (-2)^2 - 4.2 = -4$

$\Delta < 0$, donc le numérateur est du signe du coefficient de x^2, qui est positif.

Pour x >0, $x^3 > 0$, donc g'(x) >0 pour tout x > 0

c) *Tableau de variation de g*

x	0		$+\infty$
g'(x)		+	
g(x)	$-\infty$	↗	$+\infty$

g est continue et sitrictement croissante sur $]0;+\infty[$ donc c'est une bijection de $]0;+\infty[$ sur $g(]0;+\infty[) =]-\infty;+\infty[$

Comme $0 \in \left]-\infty ;+\infty\right[$, 0 possède un antécédent unique α dans $\left]0;+\infty\right[$. En d'autres térmes, il existe un α unique dans $\left]0;+\infty\right[$ tel que $g(\alpha)=0$

g est continue et croissante et $g(\frac{1}{2}) = -0,69$ et $g(1) = 1$ donc $\frac{1}{2} \leq \alpha \leq 1$.

2.- *Calcul de f '(x)*

$$f'(x) = e^x \ln x + e^x.\frac{1}{x} + \frac{e^x.x - e^x}{x^2}$$

$$f'(x) = e^x \ln x + \frac{2e^x.x - e^x}{x^2}$$

b) En mettant e^x en facteur, on a $f'(x) = e^x\left(\ln x + \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}\right)$

d'où $f'(x) = e^x g(x)$

c) Comme $g(\alpha) = 0$, on a $f'(\alpha) = 0$

d) Calcul des limites de f

- $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} (e^x \ln x + \frac{e^x}{x})$

$$= \lim_{x\to 0^+} (\frac{e^x x \ln x + e^x}{x})$$

$\lim\limits_{x\to 0^+} e^x = 1$, $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x = 0$, $\lim\limits_{x\to 0^+} (e^x x\ln x + e^x) = 1$.

Puisque $\lim\limits_{x\to 0^+} x = 0^+$, on a $\lim\limits_{x\to 0^+} (\frac{e^x x\ln x + e^x}{x}) = +\infty$

Et $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$

- $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} (e^x \ln x + \frac{e^x}{x})$

  $\lim\limits_{x\to +\infty} (e^x) = +\infty$ **et** $\lim\limits_{x\to +\infty} (\ln x) = +\infty$**, donc** $\lim\limits_{x\to +\infty} (e^x \ln x) = +\infty$

  $\lim\limits_{x\to +\infty} (\frac{e^x}{x}) = +\infty$. Ainsi $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$

e) $e^x > 0$ quel que soit x, donc f '(x) est du signe de g(x)
g est strictement croissante, et $g(\alpha) = 0$ donc

- si $0 < x < \alpha$, **g(x) < 0,**
- et si $x > \alpha$**, g(x) > 0**

e) *Tableau de variation de f*

x	0		α		$+\infty$
g(x)		−	0	+	
f '(x)		−	0	+	
f(x)	$+\infty$	↘	f(α)	↗	$+\infty$

3.- a) *Equation de la tangente (T) en 1 à la courbe (C) :* $\mathbf{y = f'(1)(x-1) + f(1)}$

$$\mathbf{f'(x) = e^x \ln x + \frac{2e^x.x - e^x}{x^2}}$$

donc $\mathbf{f'(1) = e^1 \ln 1 + \frac{2e^1.1 - e^1}{1^2}}$

$$\mathbf{f'(1) = e}$$

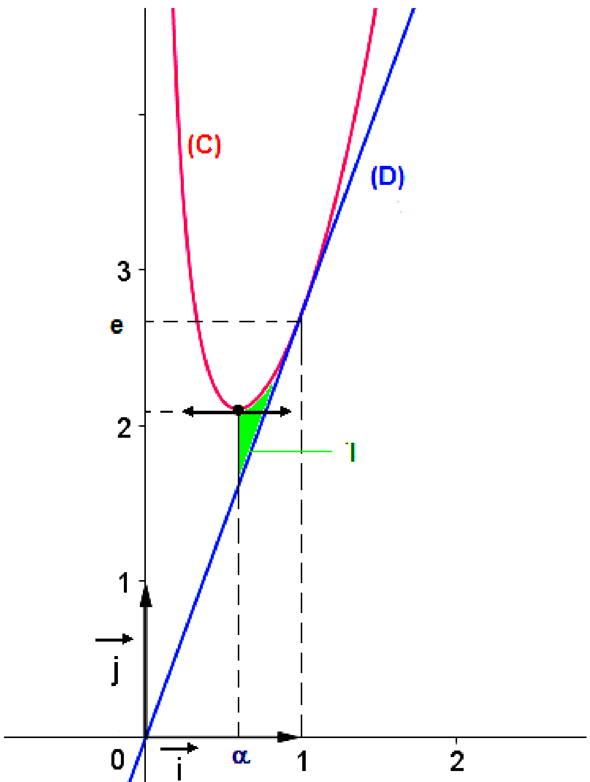
$$\mathbf{f(x) = e^x \ln x + \frac{e^x}{x}}$$

$$\mathbf{f(1) = e^1 \ln 1 + \frac{e^1}{1} = e}$$

L'équation est donc $\mathbf{y = e(x-1) + e}$

Ou $\mathbf{y = ex}$

b) *Courbe*



4.- On pose $h(x)=e^{x}\ln x$

Les fonctions ln et exponentielle sont dérivables sur $]0;+\infty[$ donc h est dérivable et

$h'(x)=e^{x}\ln x+e^{x}.\frac{1}{x}$

$h'(x)=e^{x}\ln x+\frac{e^{x}}{x}=f(x)$ donc h est une primitive de f.

5.- Soit $I=\int_{\alpha}^{1}f(x)dx$.

a) Comme h est une primitive de f, $I=[h(x)]_{\alpha}^{1}=h(1)-h(\alpha)$

$$=e^{1}\ln 1-e^{\alpha}\ln\alpha$$
$$=-e^{\alpha}\ln\alpha$$

d'apès la définition de α, $g(\alpha)=\ln\alpha+\frac{2}{\alpha}-\frac{1}{\alpha^{2}}=0$,

donc $\ln\alpha=\frac{1}{\alpha^{2}}-\frac{2}{\alpha}$.

En remplaçant $\ln\alpha$ par cette expression dans I, on a $I=e^{\alpha}\left(\frac{2}{\alpha}-\frac{1}{\alpha^{2}}\right)$

b) I est l'aire du domaine délimité par la courbe de f, la droite (D) et les droites d'equations x = 1 et $x=\alpha$