Série D – session 2004 : exercice 1 – corrigé

1.- Résolution de l'équation $Z^2-(4+5i)Z-1+7i=0$

$$\Delta=\left[-(4+5i)^2\right]-4(-1+7i)$$
$$\Delta=-5+12i$$

Soit $\delta=x+iy$ une racine de Δ. Alors $\delta^2=x^2-y^2+2ixy=-5+12i$

Ce qui donne $\begin{cases} x^2-y^2=-5 \\ 2xy=12 \\ x^2+y^2=13 \end{cases}$

La résolution de ce système donne $x=\pm 2$ **et** $y=\pm 3$.

Comme xy > 0, x et y sont de même signe. D'où $\delta=2+3i$ **ou** $\delta=-2-3i$

On va prendre $\delta=2+3i$.

Les racines de l'équation sont $z'=1+i$ **et** $z''=3+4i$

2.- On considère les points A, B et C d'affixes respectives **Z_A=1+i, Z_B= 3+4i, et Z_C=4-i**

a) S est la similitude plane directe telle que S(A)= B et S(B)= C

S(A)=B équivaut à $Z_B=aZ_A+b$, et S(B)=C équivaut à $Z_C=aZ_B+b$

On a donc le système $\begin{cases} Z_B=aZ_A+b \\ Z_C=aZ_B+b \end{cases}$

Par soustraction membre à membre, on a $Z_B-Z_C=a(Z_A-Z_B)$

D'où $a=\dfrac{Z_B-Z_C}{Z_A-Z_B}$.

Ainsi $a=\dfrac{3+4i-4+i}{1+i-3-4i}$. Ce qui donne **a = - 1 - i**

En remplaçant a par sa valeur dans l'une des équation du système, on obtient **b = 3 +6i**

L'expression complexe de S est donc $z'=(-1-i)z+3+6i$

b) $|a|=|-1-i|=\sqrt{2}$

On a alors $a=\sqrt{2}\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}-i\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$. D'où $\arg a=\dfrac{5\pi}{4}$

Soit $\Omega(\omega)$ le centre de S. Son affixe ω vérifie $\omega=(-1-i)\omega+3+6i$

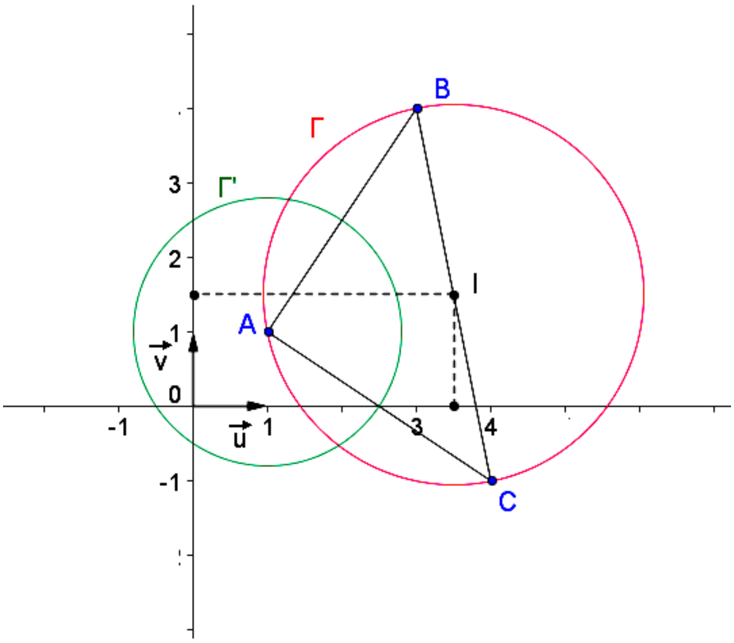
La résolution de cette équation donne $\omega=\dfrac{12}{5}+\dfrac{9i}{5}$

Le centre de S est $\Omega\left(\dfrac{12}{5}+\dfrac{9i}{5}\right)$, le rapport $\sqrt{2}$, et l'angle $\dfrac{5\pi}{4}$

3.- On note I le milieu de [BC], soit Z_I son affixe.

a) $Z_I = \dfrac{Z_B + Z_C}{2}$. Ainsi $Z_I = \dfrac{7+3i}{2}$

b)



c) L'ensemble des point M(Z) tel que $\left|Z - \dfrac{7+3i}{2}\right| = \dfrac{\sqrt{26}}{2}$

Comme $\left|Z - \dfrac{7+3i}{2}\right|$ est la distance de M à I, l'ensemble des point M(Z) tel que $\left|Z - \dfrac{7+3i}{2}\right| = \dfrac{\sqrt{26}}{3}$, l'ensemble des point M dont la distance à I est $\dfrac{\sqrt{26}}{2}$.

C'est donc le cercle de centre I et de rayon $\dfrac{\sqrt{26}}{2}$.

d) L'image de ce cercle par la similitude S est le cerclce de centre I'=S(I), et de rayon

$R' = \sqrt{2}R$

$z_I' = (-1-i)z_I + 3 + 6i$.

$Z_{I'} = 1 + i$ et $R' = \sqrt{13}$