Série D – session 2005 : problème – corrigé

Problème

Soit f la fonction définie sur $\left]-1;+\infty\right[$ par $f(x)=\begin{cases}-x+2\ln(x+1) \text{ si } x\in\left]-1;0\right[\\ x-1+e^{-x} \text{ si } x\in\left[0;+\infty\right[\end{cases}$

1.-a) *Continuité en 0*

- $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-} -x+2\ln(x+1)=0+2.0$

  Ainsi $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=0$

- $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} x-1+e^{-x}=0-1+1$

  Ainsi $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=0$
- $0\in[0;+\infty[$ donc $f(0)=0-1+e^{0}=0$

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=f(0)$ donc f est continue en 0

b) *Montrons que* $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=1$ *et que* $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=0$

- $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{-x+2\ln(x+1)-0}{x}$

$$=\lim_{x\to 0^-} -1+2\frac{\ln(x+1)}{x}=-1+2.1$$

Ainsi $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=1$

- $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x-1+e^{-x}-0}{x-0}$

$$=\lim_{x\to 0^+} 1+\frac{e^{-x}-1}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0^+} 1+\frac{\frac{1}{e^{x}}-1}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0^+} 1+\frac{1-e^{x}}{e^{x}.x}$$

$$=\lim_{x\to 0^+} 1+\frac{1-e^{x}}{x}.\frac{1}{e^{x}}$$

$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1-e^{x}}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}-\dfrac{e^{x}-1}{x}=-1$

Comme $\lim\limits_{x\to 0^+} e^x = 1$, on a $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = 0$

$\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} \neq \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}$ donc f n'est pas dérivable en, 0. La courbe de f admet en 0 une demi tangente de pente 1 à droite à gauche et une demi tangente horizontale en 1.

2.- a) *Calcul des limites en -1 et en* $+\infty$

- $\lim\limits_{x\to -1} f(x) = \lim\limits_{x\to -1} -x + 2\ln(x+1)$

  $\lim\limits_{x\to -1^+} (x+1) = 0$ donc $\lim\limits_{x\to -1^+} 2\ln(x+1) = -\infty$

  $\lim\limits_{x\to -1} -x = 1$

  Ainsi $\lim\limits_{x\to -1} f(x) = -\infty$

- $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} x - 1 + e^{-x}$

  $\lim\limits_{x\to +\infty} x - 1 = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} e^{-x} = 0$ donc $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$

b) *Calcul de f '(x) sur* $]-1\,;0\,[$

$\mathbf{Si}\ x \in]-1;0[,\ f(x) = -x + 2\ln(x+1)$, $f'(x) = -1 + 2\dfrac{1}{x+1}$

$f'(x) = \dfrac{-x+1}{x+1}$

Tableau de signe

x	-1		0
-x +1		+	
x +1	0	+	
$\dfrac{-x+1}{x+1}$	||	+	

Ainsi f '(x) > 0 pour tout $x \in]-1;0[$

c) *Calcul de f '(x) sur* $]0;+\infty[$

$\mathbf{Si}\ x \in [0;+\infty[, f(x) = x - 1 + e^{-x}$,

$f'(x) = 1 - 0 + (-e^{-x})$

$$f'(x) = 1 - e^{-x}$$

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{e^x}$$

$$f'(x) = \frac{e^x - 1}{e^x}$$

Tableau de signe

x	0		$+\infty$
$e^x - 1$		$+$	
e^x		$+$	
$\dfrac{e^x - 1}{e^x}$		$+$	

Ainsi f '(x) >0 pour tout $x \in \left]0;+\infty\right[$

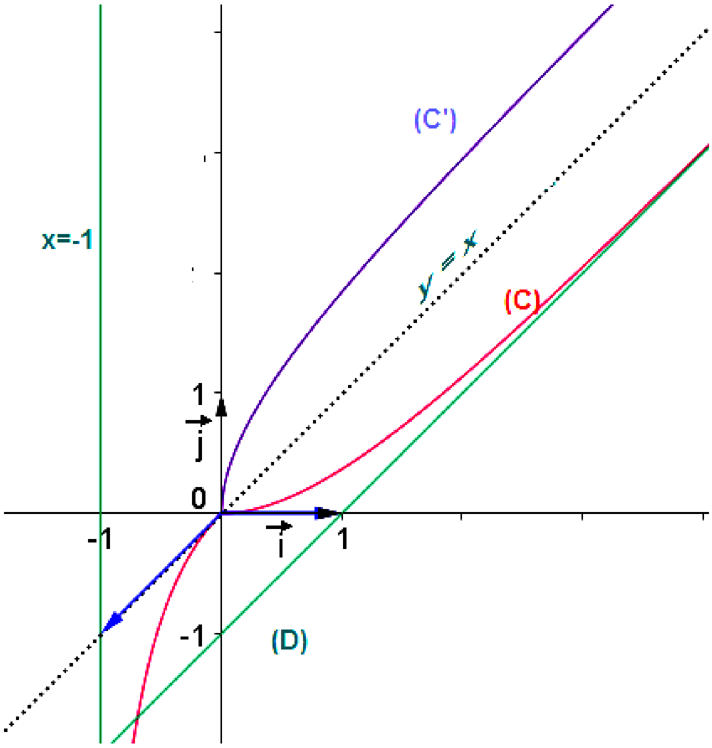
d) *Tableau de variation de f*

x	-1		0		$+\infty$
$f'(x)$		$\dfrac{-x+1}{x+1}$	$1 \; \Vert \; 0$	$\dfrac{e^x - 1}{e^x}$	
$f'(x)$		$+$	$\Vert$	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$		$\nearrow$	$+\infty$

3.- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - (x - 1) = \lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x}$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$ donc la droite d'équation y = x-1 est asymptote à (C) au voisinage de $+\infty$.

4.- *Courbe*



5.-a) *Aire* $\mathbf{A(\alpha)}$ *du domaine délimité par la courbe, la droite (D), et les droites d'équtaions x = 1 et* $\mathbf{x = \alpha}$ $(\alpha > \mathbf{1})$

$$\mathbf{A(\alpha) = \left|\int_1^{\alpha}(f(x) - (x-1))dx\right| 2.2cm^2}$$

$$\mathbf{A(\alpha) = \left(\int_1^{\alpha} e^{-x}dx\right)4}$$

$$\mathbf{= \left[-e^{-x}\right]_1^{\alpha} 4}$$

$$\mathbf{A(\alpha) = 4(e^{-1} - e^{-\alpha})cm^2}$$

b) $\lim\limits_{\alpha \to +\infty} \mathbf{(A(\alpha)) = \frac{4}{e}}\,\mathrm{cm}^2$

6.- Pour tout entier naturel n , on pose $\mathbf{U_n = \int_n^{n+1}[f(x) - (x-1)]dx}$

a) *Expression de (U_n)*

$$\mathbf{U_n = \int_n^{n+1} e^{-x}dx}$$

$$\mathbf{= \left[-e^{-x}\right]_n^{n+1}}$$

$$U_n = e^{-n} - e^{-n-1}$$
$$U_n = e^{-n}\left[1 - e^{-1}\right]$$
$$U_n = e^{-n}\left[\frac{e-1}{e}\right]$$

b) *Montrons que (U_n) est une suite géométrique*

$$U_{n+1} = e^{-n-1}\left[\frac{e-1}{e}\right]$$
$$\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{e^{-n-1}\left[\frac{e-1}{e}\right]}{e^{-n}\left[\frac{e-1}{e}\right]}$$
$$\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{1}{e}$$

(U_n) est une suite géométrique de raison $\mathbf{q} = \frac{1}{e}$. Son premier terme est $U_0 = \frac{e-1}{e}$

7.- Soit g la réstriction de g à l'intervalle $[0;+\infty[$

a) Pour tout x de $[0;+\infty[$, **g(x)= f(x).**

Comme f est continue et strictement croissante sur $[0;+\infty[$, g est continue et strictment croissante sur cet intervalle.

C'est donc une bijection de $[0;+\infty[$ sur $g([0;+\infty[) = \left[g(0);\lim_{x\to+\infty} g(x)\right[= [0;+\infty[$, et admet ainsi une réciproque g $^{-1}$ de $[0;+\infty[$ dans $[0;+\infty[$.

b) *Courbe (C') de g'$^{-1}$ sur la figure précédente*