Série D - session 2008 : problème – corrigé

I – Etude de la fonction $g : x \mapsto g(x) = x^2 + \ln x$

1 – Tableau de variation de g

- On a $\lim\limits_{x \to 0^+} g(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} (x^2 + \ln x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} (x^2 + \ln x) = +\infty$

- La dérivée $g'(x) = 2x + \frac{1}{x} = \frac{2x^2+1}{x}$

Pour tout x de $]0,+\infty[$, $g'(x) > 0$

- Tableau de variation de g

x	0		α		$+\infty$
g '(x)			+		
g(x)	$-\infty$	↗	0	↗	$+\infty$

2 – Existence d'une racine de g(x) = 0

g est continue strictement croissante sur $]0,+\infty[$, et $\lim\limits_{x \to 0^+} g(x) \times \lim\limits_{x \to +\infty} g(x) < 0$; alors, d'après le théorème de la valeur intermédiaire, il existe un unique α (α >0) tel que g(α) = 0.

3 – Signe de g(x)

x	0		α		$+\infty$
g (x)		-	0	+	

II – Etude de la fonction f

1- a) Dérivée de f

On a $f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2}\left[\frac{1}{x}x - (1 + \ln x)\right] = \frac{x^2 + \ln x}{x^2}$

d'où $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$

b) signe de f(x)

comme $x^2 > 0$ sur $]0,+\infty[$ alors sg(f '(x)) = sg(g(x))

2 – a) Calcul des limites de f

On a $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} \left((x+1) - \frac{1+\ln x}{x}\right) = +\infty$

et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left((x+1) - \frac{1+\ln x}{x}\right) = +\infty$

b) tableau de variation de f

x	0		α		$+\infty$
f ' (x)	‖	-	0	+	
f (x)	‖ $+\infty$	↘	f(α)	↗	$+\infty$

3- a) Droite asymptote

On a $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - (x+1)] = \lim\limits_{x \to +\infty} -\frac{1+\ln x}{x} = 0$

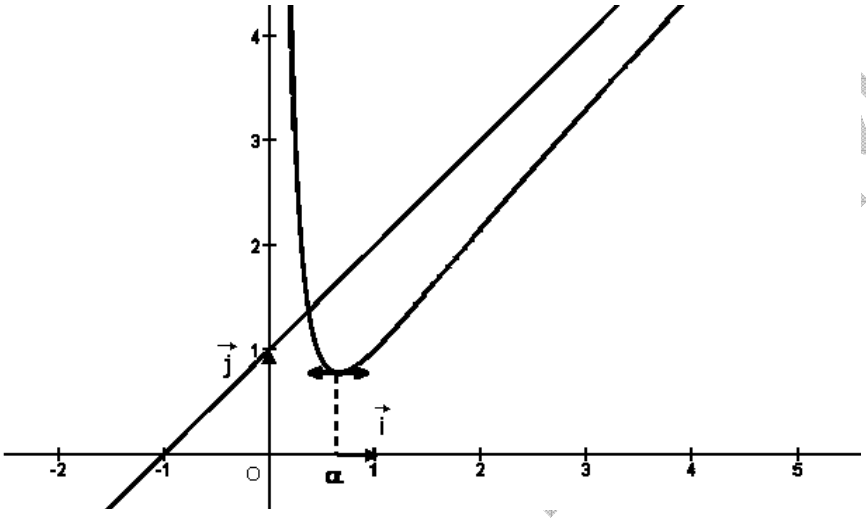
d'où la droite (Δ) d'équation y = x + 1 est une asymptote oblique de (*C*).

b) Intersection de (*C*) et (Δ)

C'est un point d'abscisse x telle que f(x) = x + 1

C'est-à-dire $-\frac{1+\ln x}{x} = 0$ ce qui donne x = 1/e

4- Courbe représentative (unité graphique : 4cm)



5- Calcul de l'intégrale I

On a $I = \int_1^e \frac{1+\ln x}{x}\,dx$

Posons $u(x) = 1 + \ln x$; on a $u'(x) = \frac{1}{x}$

alors $I = \int_1^e u'(x)u(x)\,dx = \frac{1}{2}\Big[[u(x)]^2\Big]_1^e$

$I = \frac{1}{2}\Big[(1+\ln x)^2\Big]_1^e = \frac{1}{2}(2^2 - 1^2)$

D'où $I = \frac{3}{2}$