Série D - session 2008 : exercice 1 – corrigé

1 – Résolution dans C l'équation : $z^2 - (1 - 3i)z - 4 = 0$ (E)

Le discriminant $\Delta = (1 - 3i)^2 + 16 = 8 - 6i$

Soit $\delta = \alpha + i\beta$ une racine carrée de Δ i.e. $\delta^2 = \Delta$, alors

$$\begin{cases} \alpha^2 + \beta^2 = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10 & (1) \\ \alpha^2 - \beta^2 = 8 & (2) \\ 2\alpha\beta = -6 & (3) \end{cases}$$

La résolution des équations (1) et (2) donnent $\alpha = \pm 3$ et $\beta = \pm 1$.

D'après l'équation (3), $\alpha\beta = -3$ i.e. α et β sont de signes contraires.

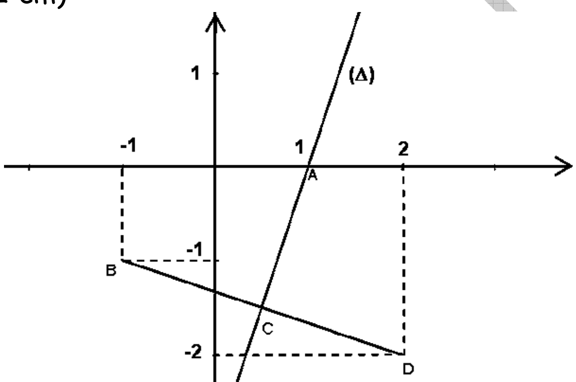
D'où $\delta = 3 - i$ est une racine carrée de Δ.

Les racines de (E) sont : $z_1 = 2 - 2i$ et $z_2 = -1 - i$

2 – a) affixe du point C milieu du segment [BD]

On a $z_C = \frac{z_B + z_D}{2} = \frac{1}{2} - \frac{3}{2}i$

Construction (unité 2 cm)



b) Ensemble (Δ) des points M d'affixe z

On pose $Z = \frac{z + 1 + i}{z - 2 + 2i} = \frac{z - z_B}{z - z_D}$

Le module de Z est $|Z| = \frac{|z - z_B|}{|z - z_D|} = \frac{BM}{DM}$

Alors $\left|\frac{z + 1 + i}{z - 2 + 2i}\right| = 1$ implique $\frac{BM}{DM} = 1$

i.e. BM = DM

L'ensemble (Δ) des points M d'affixe zest la médiatrice de [BD].

c) Vérifions que (Δ) passe par A.

On a $AB = |z_B - z_A| = |-2 - i| = \sqrt{5}$

et $AD = |z_D - z_A| = |1 - 2i| = \sqrt{5}$

d'où $AB = AD$ donc $A \in (\Delta)$.

La droite (Δ) passe par le point C milieu de [BD] et par le point A, d'où (Δ) = (AC)

3 – Etude de la similitude S telle que S(B) = B et S(A) = D

S est la similitude directe

- de centre B
- de rapport $k = \frac{BD}{BA} = \left| \frac{z_D - z_B}{z_A - z_B} \right| = \sqrt{2}$
- d'angle $\theta = (\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BD}) = \arg\left(\frac{z_D - z_B}{z_A - z_B} \right)$

On a $\frac{z_D - z_B}{z_A - z_B} = \frac{(2-2i)-(-1-i)}{1-(-1-i)} = 1 - i$

D'où $\theta = \arg(1 - i) = -\frac{\pi}{4}$