Série D - session 2009 : exercice 1 – corrigé

1- Résolution de P(z) = 0

a) Calcul de P(2)

On a $P(2) = 2^3 - (6+2i)\,2^2 + (10+8i)2 - 4 - 8i = 0$

$z = 2$ est une racine de $P(z)$

b) résolution de P(z) = 0

Algorithme de Hörner

	1	-6-2i	10+8i	-4-8i
2		2	-8-4i	4+8i
	1	-4-2i	2+4i	0

D'où $P(z) = (z-2)\,[z^2 - (4+2i)\,z + 2 + 4i\,]$

Résolution de $z^2 - (4+2i)\,z + 2 + 4i = 0$

Le discriminant $\Delta' = 1$

Alors les racines de P(z) sont : $z_1 = 2$; $z_2 = 1 + i$; $z_3 = 3 + i$

2- a) Calcul de d affixe du point D

On a $z_{\overrightarrow{BA}} = z_A - z_B = -1 + i$ alors $\overrightarrow{BA}(-1\,;1)$

$z_{\overrightarrow{BC}} = z_C - z_B = 1 + i$ alors $\overrightarrow{BC}(1\,;1)$

On a $BA = \sqrt{2}$; $BC = \sqrt{2}$ et $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC} = 0$

ABCD est un carré si $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD}$, c'est-à-dire $z_{\overrightarrow{BA}} = z_{\overrightarrow{CD}}$

Alors $(1 + i) - 2 = d - (3 + i)$

D'où l'affixe de D est $d = 2 + 2i$

b) Eléments caractéristiques de la similitude directe S

L'expression complexe de S est : $z' = (1 + i)\,z + 4i$

- le rapport $k = |1 + i| = \sqrt{2}$
- l'angle $\theta = \arg(1 + i) = \frac{\pi}{2}$
- le centre Ω d'affixe $z_\Omega = \frac{4i}{1-(1+i)} = -4$

- Expression analytique de S

On pose $z = x + iy$ l'affixe de M, et $z' = x' + iy'$ l'affixe de M' image de M par S,

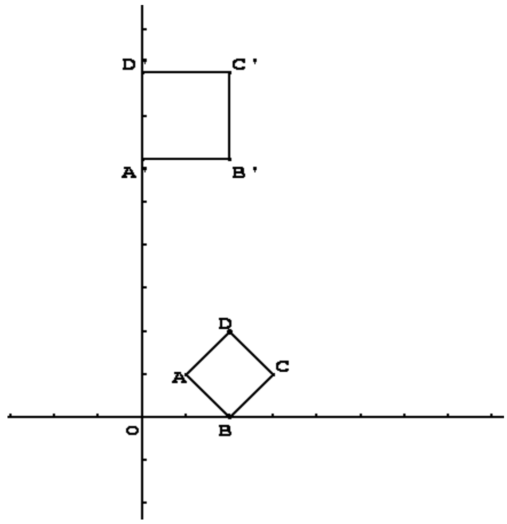
On a $x' + iy' = (1 + i)(x + iy) + 4i$

alors

$$\begin{cases} x' = x - y \\ y' = x + y + 4 \end{cases}$$

3- Construction

On a A(1,1) B(2,0) C(3,1) D(2,2) , leurs images A'(0,6) B'(2,6) C'(2,8) D'(0,8)


D'
C'
A'
B'
D
A
C
O
B