Série D - session 2011 : problème – corrigé

1 - a) Variations de g définie par $g(x) = (x - 1) e^{-x} + 2$.

g est définie sur IR.

On a $g'(x) = (2 - x)e^{-x}$.

On a $sg[g(x)] = sg(2 - x)$

Pour $x < 2$, $g'(x) > 0$ alors g est croissante.

Pour $x > 2$, $g'(x) < 0$ alors g est décroissante.

Limites de g

On a $\lim_{x\to-\infty} g(x) = -\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} g(x) = 2$

Tableau de variation

x	$-\infty$		2		$+\infty$
g'(x)		+	0	-	
g(x)	$-\infty$	↗	$2+e^{-2}$	↘	2

b) Montrons que g(x)=0 admet une solution unique α, $-1 < \alpha < 0$

g est décroissante sur $[2;+\infty[$ et $\lim_{+\infty} g = 2$, donc $g(x) > 2$ pour tout x de $[2;+\infty[$ et l'équation g(x)=0 n'admet pas de solution dans cet intervalle.

g est continue et strictement croissante sur $]-\infty; 2]$, donc c'est une bijection de $]-\infty; 2]$ sur $g(]-\infty;2]) =]-\infty;2+e^{-2}]$. Comme $0 \in]-\infty;2+e^{-2}]$, il existe un réel unique α dans $]-\infty; 2]$ tel que $g(\alpha) = 0$.

$g(-1)= -2e +2 < 0$ et $g(0) =1 > 0$ et $g(\alpha) = 0$

$g(-1) < g(\alpha) < g(0)$, Comme g est continue et strictement croissante sur [0 ; 1] on a $-1 < \alpha < 0$.

c) signe de g(x)

$g(x) > 2$ pour tout x de $[2;+\infty[$

g est continue et strictement croissante sur $]-\infty; 2]$,

donc pour tout $x < \alpha$, $g(x) \leq g(\alpha)$, et pour tout $x > \alpha$, $g(x) \geq g(\alpha)$.

Comme $g(\alpha) = 0$, on a :

$g(x) < 0$ pour tout x de $]-\infty; \alpha[$

$g(x) > 0$ pour tout x de $]\alpha +\infty[$

2 -a) Calcul de limites de $x \mapsto f(x) = x(2 - e^{-x}) + 1$

$\lim_{x\to-\infty} (2 - e^{-x}) = -\infty$ et $\lim_{x\to-\infty} x = -\infty$ donc $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$

$\lim_{x\to+\infty} xe^{-x} = 0$ et $\lim_{x\to+\infty} 2x + 1 = +\infty$ donc $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

b) Dérivée de f

Programme EDUCMAD

On a $f'(x) = 2 - (e^{-x} - xe^{-x}) + 0 = 2 + e^{-x}(x-1)$

Par conséquent $f'(x) = g(x)$

c) Expression de $f(\alpha)$

On a $g(\alpha) = (\alpha - 1)e^{-\alpha} + 2$

Alors $g(\alpha) = 0$ équivaut à $(\alpha - 1)e^{-\alpha} = -2$

C'est-à-dire $e^{-\alpha} = \dfrac{-2}{\alpha - 1}$

Et $f(\alpha) = 2\alpha + 1 - \alpha e^{-\alpha} = 2\alpha + 1 + \alpha\dfrac{2}{\alpha - 1}$

D'où $f(\alpha) = 1 + \dfrac{2\alpha^2}{\alpha - 1}$

d) Tableau de variation de f

D'après 1.c) g(x) < 0 pour tout x de] -∞ ; α [et g(x) > 0 pour tout x de] α ;+∞ [

x	$-\infty$		α		$+\infty$
f '(x)		-	0	+	
f(x)	$+\infty$	↘	$1+\dfrac{2\alpha^2}{\alpha-1}$	↗	$+\infty$

3 - a) Calcul de limite

On a $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to -\infty} (2 + \dfrac{1}{x} - e^{-x}) = -\infty$

Donc la courbe admet une branche infinie parabolique de direction asymptotique (y'Oy) au voisinage de $-\infty$

b) Equation de la tangente (T)

On a $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - (2x+1)) = \lim\limits_{x \to +\infty} -xe^{-x} = 0$

Donc la droite (D) d'équation y = 2x+1 est asymptote à (C) au voisinage de $+\infty$

c) Position de (C) par rapport à (D)

On a $f(x) - (2x+1) = -xe^{-x}$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$-xe^{-x}$		+	0	-	

Donc (C) est au-dessus de (D) sur $]-\infty ; 0[$ et au-dessous de (D) sur $]0 ; +\infty[$

4 - a) Equation de la tangente (T) en $x_0 = 1$.

f '(0) =1 et f(0)=1. Donc l'équation de la tangente à (C) en $x_0 = 0$ est y = x+1

b) Recherche de la tangente (T') parallèle à (D)

La droite (T'), tangente à (C) au point A d'abscisse a est parallèle à (D) si f '(a) =1.

Ce point A existe donc,si l'équation f '(a) =1 admet une solution. Comme f '(a)=g(a),

Programme EDUCMAD

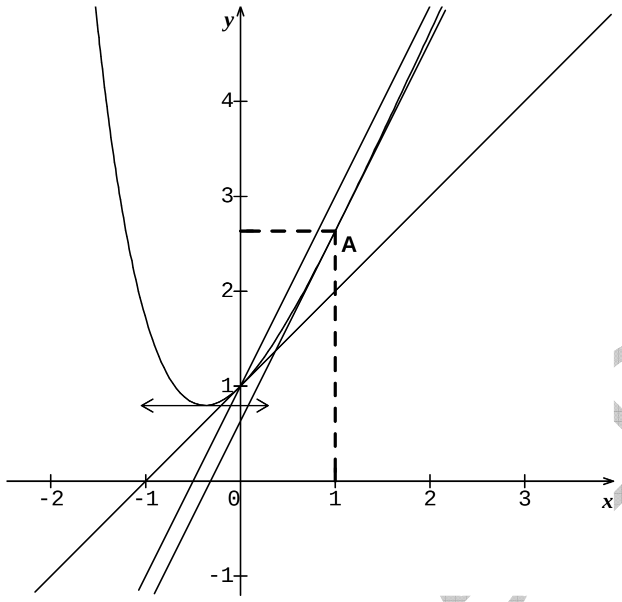
Ce point existe si l'équation $g(x) = 1$ admet une solution.
g est une bijection de $\left]-\infty ; 2\right]$ sur $g(\left]-\infty ; 2\right]) = \left]-\infty ; 2 + e^{-2}\right]$. Comme $1 \in \left]-\infty ; 2 + e^{-2}\right]$, il existe un réel unique a dans $\left]-\infty ; 2\right]$ tel que $g(a) = 1$.
Donc le point A existe et est unique.

$f'(a) = 1 \Leftrightarrow a = 1$

$f(1) = 3 - e^{-1}$

Donc A a pour coordonnées $(1 ; 3 - e^{-1})$.

5.- Courbe représentative (unité graphique : 2 cm)



6 – a) Calcul de I_λ.

On a $I(\lambda) = \int_0^\lambda x e^{-x} dx$

Posons $u = x$ et $v' = e^{-x}$. On a $u' = 1$ et $v = -e^{-x}$

Alors $I(\lambda) = \left[-x e^{-x}\right]_0^\lambda - \int_0^\lambda (-e^{-x}) dx$

$I_\lambda = e^{-\lambda}(-\lambda - 1) + 1$

b) Calcul d'aire

L'unité d'aire est $\|\vec{i}\| \times \|\vec{j}\| = 2\,\text{cm} \times 2\,\text{cm} = 4\,\text{cm}^2$

L'aire $A(\lambda) = \left[e^{-\lambda}(-\lambda - 1) + 1\right].4\text{cm}^2$

c) Limite de $A(\lambda)$

On a $\lim_{\lambda \to +\infty} A(\lambda) = 4\text{cm}^2$