Série D - session 2013 : problème – corrigé

$$f(x)=\begin{cases}(x+1)e^{x} \ si \ x\geq 0\\ e^{3x}-3x \ si \ x<0\end{cases}$$

1.- $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(e^{3x}-3x)=e^0=1$

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(x+1)e^{x}=(0+1)e^0=1$

$f(0)=(0+1)e^0=1$

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=f(0)=1$ donc f est continue en 0.

2.- $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{e^{3x}-3x-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\left(\dfrac{e^{3x}-1}{x}\right)-3$

$\lim\limits_{x\to 0^-}\left(\dfrac{e^{3x}-1}{x}\right)=\lim\limits_{x\to 0^-}\left(3\dfrac{e^{3x}-1}{3x}\right)=3$, donc $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=0$

$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{(x+1)e^{x}-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{xe^{x}+e^{x}-1}{x}\right)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(e^{x}+\dfrac{e^{x}-1}{x}\right)$

Or $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{e^{x}-1}{x}\right)=1$ *et* $\lim\limits_{x\to 0^+}e^{x}=e^0=1$, donc $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=2$

La courbe admet donc en 0 deux demi tangentes à gauche et à droite de pentes respectives 0 et 2.

3.- Branches infinies :

$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to +\infty}(x+1)e^{x}=+\infty$;

$\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to +\infty}(x+1)\dfrac{e^{x}}{x}$

$\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{e^{x}}{x}=+\infty$ *et* $\lim\limits_{x\to +\infty}(x+1)=+\infty$ donc $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{f(x)}{x}=+\infty$

Alors la courbe représentative de f admet une branche infinie parabolique de direction asymptotique ((y'Oy) au voisinage de en $+\infty$.

b) $\lim\limits_{x\to -\infty}(f(x)+3x)=\lim\limits_{x\to -\infty}e^{x}=0$, donc la droite d'équation y = -3x est une asymptote oblique au voisinage de $-\infty$.

4.- Sur $]0;+\infty[$, f est le produit des deux fonctions dérivables, $x\mapsto(x+1)$ *et* $x\mapsto e^{x}$ donc elle est dérivable, et $f'(x)=e^{x}+(x+1)e^{x}=(x+2)e^{x}$ sur cet intervalle.

x + 2 > 0 et $e^x > 0$ pour tout x de $]0;+\infty[$, donc f '(x) >0 pour tout x de $]0;+\infty[$. Ainsi f est strictement croissante sur cet intervalle.

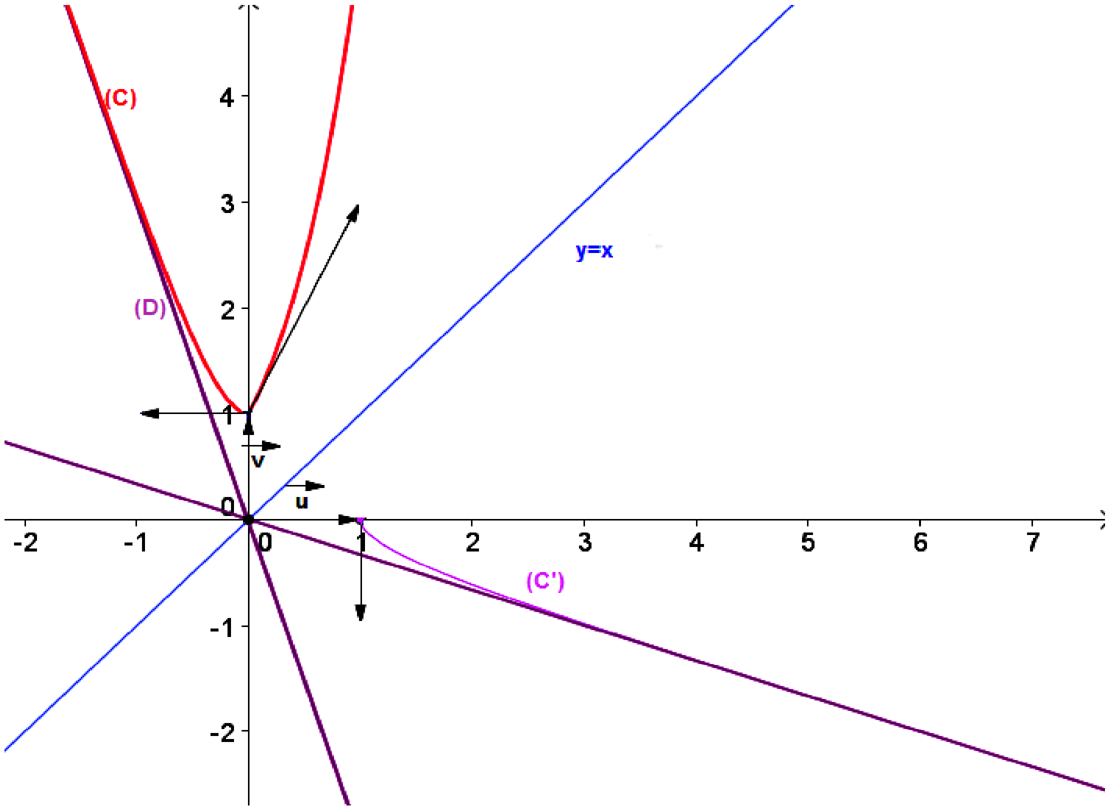
Sur $]-\infty;0[$, f est la somme des deux fonctions dérivables, $x \mapsto -3x$ et $x \mapsto e^x$ donc elle est dérivable, et $f'(x) = 3e^{3x} - 3 = 3(e^{3x} - 1)$ sur cet intervalle.
$e^{3x} - 1 < 0$ pour tout x appartenant à $]-\infty;0[$, donc f '(x) < 0 sur cet intervalle. Ainsi, f est décroissante sur $]-\infty;0[$.

Tableau de variations

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f '(x)	-	‖	+
f(x)	$+\infty$ ↘	1	↗ $+\infty$

b) Sur $]-\infty;0[$, la fonction f est strictement décroissante et $\lim_{x \to 0^-} f(x) = 1$, donc pour tout x de cet intervalle, f(x) > 1 ou f(x)-1>0. Ainsi $e^{3x} - 3x - 1 > 0$

5.- **Courbe**



6.- g est la restriction de f à l'intervalle $]-\infty;0[$

a) g est continue et strictement décroissante sur $]-\infty;0[$.

$\lim_{x\to-\infty} g(x)=+\infty$ *et* $\lim_{x\to 0} g(x)=1$.Donc g est une bijection de $]-\infty;0[$ sur $]1;+\infty[$. Comme 2 appartient à $]1;+\infty[$, 2 possède un antécédent unique α par g dans $]-\infty;0[$, i.e, l'équation g(x) = 2 admet une solution unique α dans $]-\infty;0[$.

b) g^{-1} est la réciproque de g. Comme g(α) = 2, $g^{-1}(2)= \alpha$.

$$(g^{-1})'(2)=\frac{1}{g'\left(g^{-1}(2)\right)}=\frac{1}{g'(\alpha)}$$

$$g'(\alpha)=f'(\alpha)=3e^{3\alpha}-3$$

Finalement $(g^{-1})'(2)=\dfrac{1}{3e^{3\alpha}-3}$.

d) L'aire est, en cm², $A_\alpha=(\int_\alpha^0 (f(x)-3x)dx)2.2=(\int_\alpha^0 e^{3x}dx)4=\frac{1}{3}\left[e^{3x}\right]_\alpha^0 4$

$$A_a=4\left[\frac{1}{3}-\frac{1}{3}e^{3\alpha}\right]cm^2$$