Série D - session 2013 : exercice 2 – corrigé

1.- $P(z)=z^3-(3+3i\sqrt{3})z^2-(6-6i\sqrt{3})z+8+24i\sqrt{3}$

a) Soit a un nombre réel..

$P(a)=a^3-(3+3i\sqrt{3})a^2-(6-6i\sqrt{3})a+8+24i\sqrt{3}$

A est une solution de l'équation P(z) = 0 si et seulement si

$a^3-(3+3i\sqrt{3})a^2-(6-6i\sqrt{3})a+8+24i\sqrt{3}=0$.

Ce qui équivaut à $\begin{cases} a^3-3a^2-6a+8=0 & (1) \\ -3\sqrt{3}a^2+6\sqrt{3}a+24\sqrt{3}=0 & (2) \end{cases}$

L'équation (2) équivaut à $-a^2+2a+8=0$

$\Delta=2^2+4.8=36$

$a'=\dfrac{-2+\sqrt{36}}{-2}=-2 \quad a''=\dfrac{-2-\sqrt{36}}{-2}=4$.

$(-2)^3-(-2)a^2-6(-2)+8=0$ et $4^3-3.4^2-6.4+8=0$ donc les deux nombres sont racines de P(z)=0.

b) Par division euclidienne de P(z) par $-3\sqrt{3}z^2+6\sqrt{3}z+24\sqrt{3}$, on obtient

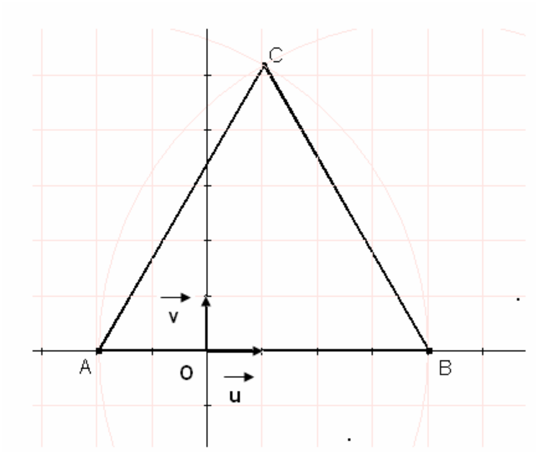
$P(z)=(z+2)(z-4)(z-1-3i\sqrt{3})$

On a alors P(z)= 0 équivaut à z+ 2 = 0 ou z - 4 = 0 ou $z-1-3i\sqrt{3}=0$.

D'où

$S=\left\{-2;4;1+3i\sqrt{3}\right\}$

2.- a)



b) $Z=\dfrac{4+2}{1+3i\sqrt{3}+2}=\dfrac{6(3-3i\sqrt{3})}{36}$

$Z=\dfrac{1}{2}-i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

Programme EDUCMAD

|Z | =1 et $\arg Z = -\frac{\pi}{3}$. Donc ABC est un triangle équilatéral.

3.-a) ABDC est un parallélogramme si et seulement si $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}$, ou $z_D - z_C = z_B - z_A$

On a $z_D = z_B - z_A + z_C = 4 + 2 + 1 + 3i\sqrt{3}$

Alors $z_D = 7 + 3i\sqrt{3}$.

b) S est une similitude plane directe donc l'expression complexe de S est de la forme z ' = az +b.

S(B) = D et S(A)= A, ainsi

$\begin{cases} z_D = az_B + b \\ z_A = az_A + b \end{cases}$; ou $\begin{cases} 7 + 3i\sqrt{3} = a4 + b \\ -2 = -2a + b \end{cases}$

$$a = \frac{7 + 3i\sqrt{3} + 2}{4 + 2} = \frac{3 + i\sqrt{3}}{2}$$

$$b = -2 + 2a = -2 + 2\frac{3 + i\sqrt{3}}{2} = 1 + i\sqrt{3}$$

L'expression complexe de S est donc $z' = \frac{3 + i\sqrt{3}}{2} z + 1 + i\sqrt{3}$

$$|a| = \left|\frac{3 + i\sqrt{3}}{2}\right| = \sqrt{3} \ et \ \arg a = \arg\left(3(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2})\right) = \frac{\pi}{6}$$

Ainsi S est la similitude plane directe de centre A, de rapport $k = \sqrt{3}$ et de rapport $\theta = \frac{\pi}{6}$

Programme EDUCMAD